MEMORIA
SUL PRINCIPIO
DELLE VELOCITÀ VIRTUALI

DEL CAVALIERE

VITTORIO FOSSOMBRONI

ARETINO

UNO DEI QUARANTA DELLA SOCIETA ITALIANA,

SOCIO DELL' ISTITUTO DI BOLOGNA ec.

FIRENZE MDCCXCVI.

PER GAETANO CAMBIAGI STAMPATORE GRANDUCALE.

PREFAZIONE

La necessità madre sovente delle più belle scoperte ha suggerito agl' uomini maravigliose invenzioni, specialmente in Meccanica. Conobbero essi molti effetti di questa arte anche ignorandone le ragioni, e seppero trarne l' opportuno profitto. Gli sforzi meccanici degli antichi popoli, le vaste Moli inalzate già in Asia, e in Egitto, sono fatti, che se in tutta la loro estensione furono messi in dubbio da qualche moderno, restano abbastanza autenticati dai maestosi avvanzi d' Egitto, Palmira, Persepoli, Spalatro, e Roma.

Furono gli antichi probabilmente guidati dalla esperienza, senza conoscere i sublimi principj della Meccanica, e pervennero a dei *gran resultati per uno sforzo di genio, o istinto, in virtù del quale gl' uomini sanno più fare, che intendere; sentono talora la verità anco quando non è dimostrata; e si giustifica la sentenza di Dante*

„ . . . . dietro ai sensi
„ Vedi che la ragione ha corte l'ali.

Al rinascere delle Scienze Galileo investigò i Teorici Fondamenti dell' equilibrio, e del moto, assoggettandoli alla guida della Geometria, e col Principio delle Velocità Virtuali sparse una nuova universale irradiazione in tutte le macchine semplici, e composte.

Quantunque un grand' Uomo del nostro secolo abbia accortamente rilevato, che le scoperte scientifiche servono per discostarsi dal falso, assai più che per avvicinarsi al vero, nondimeno dopo le scoperte di Galileo la Meccanica annunziò frutti di più nobil *tempra che quelli sollecitati dalla necessità, o da un cieco fasto, al lume languido, e mal fermo di un istinto fervido, e di una ragione vacillante.*

Fu allora che gli uomini osarono di sublimarsi in guisa, da associare per dir così, le proprie speculazioni alle immense vedute del Supremo Autore della Natura, e quindi non limitandosi più all' Argano, ed alla Leva, passarono in rivista gli elementi; conversero in profitto per le sociali occorrenze gli sforzi dell' acqua, dell' aria, e del fuoco istesso, e fino certi movimenti degli Astri incogniti all' occhio nudo, esercitando una specie di dominio nel meccanismo dell' Universo.

In fatti la Meccanica per mezzo del Principio delle Velocità Virtuali, unita alla Geometria partecipò della medesima evidenza, e ne godè i privilegj per tutta l' ampiezza, in *cui poteva spaziare la sintesi. In seguito la nuova Geometria (la quale con rapido volo percorre lo spazio, che l' antica era obbligata a misurare con lento passo, e giunge ove quella non si sà che sia mai penetrata) ha corrisposto alle più lusinghiere speranze, ed il Sig. La Grange il primo nell' immortale sua Opera intitolata Meccanica Analitica, non solo mostrò che il Principio delle Velocità Virtuali è dovuto a Galileo, ma rilevò ancora, che questo Principio ha il vantaggio di potersi tradurre in linguaggio algebraico, cioè di essere espresso per una formula analitica, onde tutte le risorse della analisi vi si applicano direttamente.*

Quel Principio dopo inventato da Galileo era rimasto quasi negletto, come penderebbe inutile una grande spada, fino a tanto che non nascesse un braccio atto a brandirla. In fatti *il Sig. La Grange padrone di tutto l'Ente matematico, ha saputo valutarne l'importanza, e la fecondità, facendo per mezzo di esso della Meccanica una scienza nuova a segno, che nella universale dottrina dell'equilibrio, e del moto dei solidi, e dei fluidi, tutti quei difficili Problemi, che avevano condotto fino ad ora i Geometri per mille diverse spinosissime strade, sono ridotti ad un procedere regolare, ed uniforme. E per dare un'idea di quanto abbia quindi progredito lo spirito umano, si può dire, che il moto, e l'equilibrio dei Corpi Celesti, la figura di essi, e le orbite, che descrivono, non richiamano in sostanza, per quanto appartiene alla Meccanica, a considerare altre leggi oltre quelle, che hanno luogo nel calcolare il moto, e l'equilibrio di un Vette del primo genere; quantunque le difficoltà di puro calcolo, e la moltitudine degli oggetti da con-*

templarsi presentino un apparato più vasto, ed imponente.

Il Principio delle Velocità Virtuali può con la massima precisione, e chiarezza enunciarsi come appresso: „ Dato un sistema composto „ di un numero qualunque di punti o corpi, „ ai quali sieno applicate delle forze comun- „ que dirette, suppongasi che a questo sistema „ sia dato un impulso qualunque, per cui si „ ecciti in esso un movimento; E' chiaro, che „ nel primo istante di tal movimento i punti, „ o corpi, ai quali sono applicate le forze de- „ scriveranno uno spazio infinitesimo, che „ rappresenterà la Velocità Virtuale del re- „ spettivo punto. Dall'estremità di ciascu- „ no di questi spazi si potrà condurre una „ perpendicolare sopra la direzione della for- „ za respettiva, la quale perpendicolare in- „ tercetterà quella porzione di spazio, che

„ *ciascheduno dei punti avrà percorso secon-*
„ *do la direzione della forza, nel primo istante*
„ *del movimento. Chiamando* P', P'', P''' ec.
„ *le forze applicate ai vari punti* p', p'', p''' ec.
„ *le linee secondo le quali giacciono le respet-*
„ *tive loro direzioni, saranno* dp', dp'', dp''' ec.
„ *gli spazietti, che ciaschedun punto avrà*
„ *percorso nella direzione della respettiva*
„ *forza, ed i prodotti* $P'dp'$, $P''dp''$, $P'''dp'''$ ec.
„ *si chiameranno i momenti delle forze. Ciò*
„ *posto se la somma dei momenti sarà* $= 0$,
„ *(avvertendo una volta per sempre, che sieno*
„ *cangiati i segni secondo le note condizioni*
„ *di ciascheduna questione, in tutto il se-*
„ *guente Opuscolo) le forze avanti l'impulso*
„ *dato al sistema si elidevano, o sia il siste-*
„ *ma era in equilibrio.* „ *Ed in questo ap-*
punto consiste uno dei gran vantaggi del Prin-
cipio delle Velocità Virtuali, che prescindendo

da ogni altra estrinseca considerazione, riduce adunque tutte le condizioni dell' equilibrio, sotto un aspetto di speculazione algebraica, come che dipendenti dall' unica, e semplicissima equazioue

$$P'dp' + P''dp'' + P'''dp''' + \text{ec.} = 0 .$$

Alcuni si sono occupati nel far vedere, che questo Principio è vero, mostrando la conformità dei risultati di esso, con quelli dedotti da altri metodi universalmente ammessi. Ma se veramente non se ne potesse ottenere altra autentica, saremmo ben lontani dallo scopo, a cui mirano ordinariamente i Geometri; nella stessa guisa, che allor quando i seguaci di Leibnitz mancavano di una convincente dimostrazione del Calcolo Infinitesimale, era debole appoggio per essi l' osservare l' uniformità de' suoi resultati, con quelli della Geometria degli Antichi.

Il Sig. La Grange presenta a pag. 12. *e seguenti della sua Meccanica, il Principio delle Velocità Virtuali, incominciando dalla supposizione seguente, cioè, che in qualunque Macchina in equilibrio, le forze sieno tra loro in ragione inversa delle Velocità Virtuali dei punti, ai quali le forze sono applicate, computando le Velocità Virtuali secondo la direzione delle forze medesime.*

Avverte il Sig. La Grange, che da molto tempo si conosce questa proposizione come un principio fondamentale della Meccanica, e che dopo il Galileo si può riguardare come una specie di assioma meccanico. E supposto un tale assioma meccanico il Signor La Grange prende a considerare tre forze applicate a tre punti in equilibrio, e sostituendo in vece di qualunque di esse forze un punto fisso, con un ingegnoso, ed incontrovertibile artifizio *analitico, partendo da tale supposizione di un punto fisso, e due forze sole, verifica il Principio delle Velocità Virtuali, e lo estende ad un numero qualunque di forze.*

Dopo il ragionamento del Sig. La Grange potrebbe pure qualche scrupoloso Geometra (giacchè non vi è scienza che debba essere priva di ogni ombra quanto la Matematica) muovere qualche dubbio, o non ammettendo come assioma il Principio delle Velocità Virtuali, o provando difficoltà ad estendere quella dimostrazione ad una massa qualunque di molecole, componenti un fluido in equilibrio.

La più adattata, e semplice idea, che possa presentare l' assioma in questione, è quella di un Vette, in cui oltre al punto fisso vi sieno due punti agitati da due forze in equilibrio; l' assioma adunque esige, che dato un impulso qualunque al Vette, si notino gli spazi che nel *primo istante del moto, i punti ai quali sono applicate le forze descriveranno nella direzione delle forze medesime, e che si concepisca per una specie di intuizione, dovere per causa del supposto equilibrio, essere quelli spazi inversamente proporzionali alle forze.*

Quella comune facoltà di primitiva intuizione, per cui ognuno si convince facilmente di un semplice assioma Geometrico, come per esempio, che il tutto sia maggior della parte, *non serve certamente per convenire della sopraccennata verità meccanica, la quale è tanto più complicata di quello che sia uno degli ordinari assiomi, quanto il genio di quei grandi Uomini, che l'hanno ammessa per assioma, supera l'ordinaria misura dell'ingegno umano; ed è in conseguenza necessario per coloro, che non ne restano appagati, il procurarsene una dimostrazione dipendentemente* *da estranee teorie, come è piaciuto al Riccati, (che con qualche soccorso tutto metafisico, si è ristretto presso a poco a questo caso particolare in alcune Lettere stampate in Venezia nel* 1772.) *ovvero riposarsi sulla fede d' uomini sommi, disprezzando l' abituale ripugnanza ad introdurre in Matematica il peso dell' autorità. E se veramente questa tiranna della ragione dovesse per una sol volta apparire nel Tempio d' Urania, non potrebbe seguir ciò con minore scandalo, che trovandosi essa in mezzo a Galileo, e a La Grange.*

Passando poi alla considerazione dei fluidi, abbiamo rilevato che ammesso il Principio delle Velocità Virtuali per due forze applicate a due vari punti di un Vette, si estende ad un numero qualunque di forze per semplice artifizio di calcolo, di maniera che può parere, che il principio in questione resti gene-

ralizzato affatto, ed esteso ad un ammasso qualunque di molecole costituenti un sistema in equilibrio, e quindi anco ai fluidi.

Siccome nonostante in materia così delicata possono meritare attenzione ancora i più tenui dubbi, gioverà quì rilevare una differenza, che s'incontra nel passare dalla ipotesi di un sistema solido ed inflessibile, a quella di un fluido. Suppongo un corpo solido, ed inflessibile, a ciaschedun punto del quale sieno applicate delle forze comunque P', P'', P''' ec. *con le direzioni* p', p'', p''' ec. *Quando io asserisco che, supposto questo corpo in equilibrio, dandogli un piccolo impulso, avrà luogo l'equazione dei momenti* $P' d p' + P'' d p'' + P''' d p''' + P'''' d p'''' + P^{v} d p^{v} + \text{ec.} = 0$, *l'asserisco perchè, se in vece di essere indefinito il numero dei punti, e delle forze respettivamente applicatevi, fosse limitato a tre* *soltanto, seguendo l' ingegnosissimo ed inconcusso raziocinio del Sig. La Grange, io potrei sostituire in vece di qualunque delle tre un punto fisso, e ridurre il dato solido ad un Vette semplice, in cui per l' assioma precedentemente discusso, si verifica l' equazione dei momenti tra le due forze; ed in virtù dell' assioma stesso, e della inseparabile considerazione del Vette, posso progredire dalle due forze alle tre, dalle tre alle quattro, e così seguitando il procedere del calcolo, pervenire ad un numero qualunque indefinito.*

Sia adesso il sistema composto di parti affatto sciolte, e per esempio, costituenti una massa fluida, a ciaschedun punto della quale siano applicate delle forze, in modo che tutto il sistema sia in equilibrio. Dando un impulso a questo fluido, se vorrò stabilire l' equazione dei momenti comprendente tutte le forze in *questione, non potrò percorrere l' istessa serie d' idee, che mi è necessariamente occorsa nel caso del solido descritto sopra, e non potrò in questa occasione asserire, che sussiste l' equazione tra tutte quelle forze per la ragione che ha avuto luogo allora, cioè che se fossero tre sole forze sussisterebbe, col soccorso dell' assioma, che fa dipendere il tutto da un Vette. In fatti una massa fluida di sensibile estensione non può stare in equilibrio per tre sole forze applicate a tre vari punti di essa, e molto meno per due forze sole, ed un punto fisso, nè per conseguenza ammette l' idea di un Vette, i componenti del quale conservano sempre tra loro le stesse distanze, nè dell' assioma che è stato necessario per istituire la dimostrazione, nel caso del sistema solido ed inflessibile.*

Ad oggetto d' illustrare ulteriormente la sopraccitata differenza, concepiscasi un Vette *rettilineo a braccia eguali, e tenuto in equilibrio da due eguali forze; nel primo istante del movimento originato da un qualunque impulso, gli spazi che descriveranno le sue estremità nella direzione delle respettive forze, saranno eguali, e si verificherà perciò l'equazione dei momenti, che potrà per quel che si è sopra accennato estendersi ad un numero qualunque di forze fossero applicate ai vari punti delle braccia del Vette; ma quì si avverta, che a questi vari punti delle braccia del Vette, o sieno applicate infinite forze, o non sieno, tutti questi vari punti, io dico, sono astretti alla condizione di non poter variare le respettive distanze tra loro, qualunque suppongasi il dato impulso.*

Sia adesso un fluido incompressibile, per esempio, l'acqua rinchiusa dentro un recipiente, il quale non abbia, che due eguali infi-

nitesimi fori, e per mezzo di questi possano agire due forze eguali, che chiudano l'acqua in equilibrio dentro al recipiente: dato un impulso qualunque all'acqua, nel primo istante del movimento per causa dell'incompressibilità, si può concepire, che quanto l'acqua farà retrocedere escendo da uno dei fori la respettiva forza, altrettanto l'altra forza dovrà introdursi nel recipiente, e per conseguenza si avrà anche in questo sistema fluido, l'equazione dei momenti tra le due forze in questione.

È da notarsi che nel caso del tubo, o recipiente suddetto, l'incompressibilità del fluido per rapporto ai due punti estremi ove sono applicate le due forze, può parere, che produca l'effetto corrispondente a quello che producono le braccia eguali nel Vette, in quanto che tenuti quei due estremi punti in equilibrio, *vi restano ancora necessariamente tutti gli altri. Ma quando le forze sono più, e applicate a tutti i punti, e si volesse dalla considerazione di due forze sole passare a quella di infinite forze applicate ai punti di tutto il fluido, e per conseguenza tener conto di tutti gli spazietti, che nel primo istante del movimento possono essere percorsi da tutte le molecole, che compongono il sistema, si vede facilmente tali molecole, non già come nel caso del Vette, essere obbligate a conservare fra di loro sempre le stesse distanze, ma potere in mille guise esercitare variatissimi moti.*

Sembra adunque, che lo sviluppo del Principio delle Velocità Virtuali, in specie nei fluidi, dipenda principalmente dall' analisi delle condizioni, che osservano i punti, o le molecole componenti il sistema, nel variare *le respettive loro distanze, allorquando dallo stato d'equilibrio passano allo stato di movimento, per causa d'un impulso qualunque, che gli venga impresso.*

E' vero che sì fatta analisi impegna facilmente in qualche complicazione di teoríe; ed è vero che sarebbe aggradevole se il Principio delle Velocità Virtuali sussistesse per se medesimo, e non fossero necessarie per convalidarlo altre fondamentali considerazioni; ma tutto ciò nonostante pare vantaggioso il perdere un poco per la parte della semplicità, per acquistar tutto dalla parte dell'evidenza; ed è notabile, che il Principio delle Velocità Virtuali, obbligando a ridurre nella direzione delle forze, gli spazi comunque percorsi dai vari corpi, viene ad includere qualche cosa di analogo all' idea della composizione del movimento, e perciò viene a sembrare una pro-

prietà indivisibile dall' equilibrio, ma non affatto separabile da ogni altro Principio.

Percorrendo l' Istoria della Meccanica s' incontrano vari principj adottati con entusiasmo, ed accreditati da uomini celebri, ma che non essendo sostenuti se non dalla giustezza dei resultati, o da dimostrazioni soggette a qualche dubbio, si sono in seguito scoperti mancanti della necessaria precisione, o decisamente fallaci. Così il famoso Principio dell' Azione minima, *da cui Maupertuis dedusse le leggi della reflessione, e refrazione della luce, e quelle dell' urto dei corpi, è stato riconosciuto non abbastanza universale, e preciso; talmente che convenne al grand' Eulero riguardarlo sotto un altro aspetto per dedurne delle insigni proprietà, che hanno ricevuto una luminosa estensione (e per dir tutto in breve, corrispondente al di lui genio) dal Sig. La Grange, il* *quale per altro piuttosto che un Principio metafisico, vi riconosce una conseguenza delle leggi della Meccanica.*

Così il non meno famoso Principio della conservazione delle forze vive, *che inventato dall' Huyghens, ha servito di base alla Idrodinamica di Daniello Bernoulli; è stato fiancheggiato dai raziocini di molti insigni Geometri, combattuto da altri, e finalmente d'Alembert ha dimostrato esservi assai occasioni, nelle quali non poteva adoprarsi, ed il Signor la Grange è giunto a pag. 206. e seguenti della sua Meccanica, a poter fissare i criteri, per distinguere i casi nei quali è vero, da quelli nei quali è falso.*

Non sarebbe adunque meraviglia, che alcuno mancasse di tutta la piena fiducia sul Principio delle Velocità Virtuali, specialmente attendendo all' espressioni delle quali si sono *serviti intorno a sì fatti particolari, anco nei modernissimi tempi, dei Geometri insigni, e servirà per tutti, citare in primo luogo il Signor d' Alembert, che lasciò scritto nel Tomo* VIII. *de' suoi Opuscoli stampato nel* 1780. *a pag.* 45. On voit par les deux questions que nous venons de proposer dans ce paragraphe, qu'il manque encore quelque chose aux Principes de Mechanique, & qu'il y a des cas où les loix connues jusqu'ici, paroissent insuffisantes; *ed in secondo luogo il Sig. Prony, che nella sua dottissima Architettura Idraulica Volume I. stampato in Parigi nel* 1790. *pag.* 62. *parlando individualmente delle Velocità Virtuali, scrive*: Il n'existe pas de demonstration generale, & directe de ce Principe; mais sa verité n'en est pas moins certaine, puis qu'il donne des resultats absolument conformes a tous ceux obtenus d'ailleurs.

Ardisco pertanto presentare al Pubblico la dimostrazione, che ho ritrovata del Principio delle Velocità Virtuali, perchè quei Geometri, che per una invidiabile intellettuale energía, senza bisogno di prova ulteriore ne fossero convinti, potranno forse trovare non indegne di attenzione alcune singolarità, che porta seco la condotta Analitica; ed agl' altri che amassero di vederlo al coperto da ogni possibile attacco, spero che sarà grato di non aver più sù tal proposito nulla da desiderare.

E per verità poichè Galileo ha inventato un tal Principio; poichè nella più grand' Opera Fisico-Matematica del secolo, cioè nella Meccanica del Sig. La Grange, è stato suscettibile di tanta estensione, da non abbandonare questo sommo Geometra per tutte le ignote strade, che ha felicemente percorse, e da comprendere tutta la materia sotto l' istesse leggi, *senza bisogno di separare le meccaniche affezioni dei solidi da quelle dei fluidi; poichè finalmente di un ramo tanto vasto di scibile è ritrovata una così feconda radice, sembrerà pregio dell'opera l'averne ricercate le più intrinseche appartenenze, ponendola nel suo più chiaro lume, sicchè il Genio possa tranquillamente occuparsi intorno all'universale teoría dell'equilibrio, e del moto, senza esser disturbato dal temere, che di sì maestoso edifizio vacillino in parte i fondamenti, come l'Istoria, e le sopraccitate titubanze suggerirebbero.*

Io mi sono servito nelle presenti ricerche della composizione, e decomposizione delle forze, Dottrina, sulla quale non vi è chi possa muover dubbio, e di cui il Signor La Grange crede autore il Galileo; onde una scoperta di questo gran lume della Filosofia è servita di punto d'appoggio per dare una dimostrazione *del Principio delle Velocità Virtuali, parimente invenzione di lui, la quale se esso potè, per dir così, piuttosto sentire, che generalmente dimostrare, non è maraviglia, considerando quanto in oggi si debba ai tanto più efficaci soccorsi, che somministra la Geometria.*

In fatti le diverse maniere d'impostare le variazioni, o differenze, ed il Calcolo delle Funzioni indeterminate, si vedrà nella seconda Parte come conducano a generalizzare la questione in guisa, che anco i fluidi ne divengano un caso particolare, subito che si ammetta una figura nei componenti di essi; e come si possa per conseguenza prescindere dal considerare la fluidità, o continua (secondo la denominazione di alcuni) o composta di esilissime molecole; togliendo di mezzo i Paradossi, che s'incontrano nell'equilibrio dei fluidi, tra' quali è noto quello di una moltitudine di sfere, *che sembra starebbero in equilibrio, per quanto piccole sieno, in un vaso aperto superiormente, ed inclinato all' orizzonte, mentre un fluido si muoverebbe al primo aberrare dall' orizzontalità.*

Suppongasi un volume di materia in equilibrio, a tutti i punti del quale sieno applicate delle forze qualunque; e suppongasi, che rompendosi per un dato impulso l' equilibrio, tutti i punti nel muoversi possano variare le respettive distanze fra loro, con leggi affatto ignote; è chiaro, che se il dato volume fosse composto di tanti solidi comunque figurati, i punti di ciaschedun solido nel muoversi, dovrebbero conservare tra loro le stesse distanze; ma nella nostra ipotesi si concepisce facilmente, che i moti di tutti i punti saranno così vari, e tanti da scoraggire a prima vista chi ne intraprendesse la considerazione. Ciò nonostante si ve-

drà, seguendo l'analisi da me imaginata, illustrato pienamente ancòra questo generalissimo caso, e che mediante l'introduzione d'alcune funzioni arbitrarie, si sono potuti tracciare in guisa tutti quelli infiniti movimenti, da verificare in essi una proprietà sempre costante, salva la loro arbitraria variabilità; e questo mi pare un resultato di dettaglio, a cui non avrebbe osato di aspirare l'antica Geometria; una prova di quanto sia perfezionata la moderna; ed i sublimi coltivatori di essa si degneranno forse di riconoscervi un nuovo frutto delle gloriose loro fatiche.

MEMORIA
SUL PRINCIPIO
DELLE VELOCITÀ VIRTUALI

PARTE PRIMA

Dei sistemi a distanze invariabili.

§. I.

UN numero qualunque di punti in equilibrio agitati da quante si vogliano forze, e stabiliti a distanze invariabili frà loro comporrà un solido rigido, e capace di prendere moto per un impulso che se li dia; ma qualunque moto prenda non cangeranno le respettive distanze, e situazioni i suoi componenti, ed è in tali specie di sistemi che dimostrerò in questa prima parte verificarsi l'equazione dei momenti dedotta dal Principio delle Velocità Virtuali.

§. II.

Sia primieramente un punto solo in equilibrio a cui suppongansi applicate le forze P', P'', P''', ec. e sieno le linee

p', p'', p''' ec. situate nelle direzioni delle forze medesime, dimodo che le variazioni, o differenze dp', dp'', dp''' ec. di tali linee, esprimeranno i cangiamenti di luogo del respettivo punto, stimati nel senso delle direzioni delle forze; e se tali variazioni, o differenze saranno infinitesime, i differenziali dp', dp'', ec. le Velocità Virtuali de' respettivi punti stimate nella direzione delle forze esprimeranno.

§. III.

Avverto una volta per sempre che in questa prima parte con le varie caratteristiche differenziali d, δ, δ', Δ delle quali avrò occasione di servirmi intendo di designare differenze, o variazioni tanto finite, che infinitesime, onde se tali caratteristiche esprimono differenze finite, o infinitesime risulterà dalla natura della questione, e non dalla usanza comune di intendere per differenze finite quelle segnate col Δ, e infinitesime le altre.

§. IV.

Prendo tre assi normali tra loro, e di comune origine dimaniera che x, y, z, sieno le coordinate del punto dato parallele ai descritti tre assi; suppongo che α', β', γ' sieno gli angoli che la linea p' fa con gli assi delle x, y, z;

che α'', β'', γ'', gli angoli, che fa con i medesimi tre assi la linea p''; e così α''', β''', γ''' gli angoli che vi fa la linea p'''; e nell'istessa guisa delle altre. Ciò posto il Sig. La Grange ha dimostrato che prendendo le differenze infinitesime sarà

$$d p' = \cos.\alpha'\, d x + \cos.\beta'\, d y + \cos.\gamma'\, d z$$
$$d p'' = \cos.\alpha''\, d x + \cos.\beta''\, d y + \cos.\gamma''\, d z$$
$$d p''' = \cos.\alpha'''\, d x + \cos.\beta'''\, d y + \cos.\gamma'''\, d z$$

ec. ec.

§. V.

Ma se alcuno potesse dubitare che tali equazioni non si verificassero ancora nelle differenze finite, io lo dimostro nel modo seguente. Ponendo secondo il procedere del Sig. La Grange che le linee p', p'' ec. terminino ad altrettanti punti riguardati come fissi, e le coordinate dei quali parallelamente ai tre assi sieno a', b', c'; a'', b'', c'' ec. è chiaro che sarà

$$p' = \sqrt{\left((x'-a')^2+(y'-b')^2+(z'-c')^2\right)}$$

$$p'' = \sqrt{\left((x''-a'')^2+(y''-b'')^2+(z''-c'')^2\right)}$$

ec. ec.

onde prendendo le differenze infinitesime sarà

$$dp' = \frac{x'-a'}{p'}dx' + \frac{y'-b'}{p'}dy' + \frac{z'-c'}{p'}dz'$$

$$dp'' = \frac{x''-a''}{p''}dx'' + \frac{y''-b''}{p''}dy'' + \frac{z''-c''}{p''}dz''$$

ec. ec.

dal che considerando essere

$$\frac{x'-a'}{p'} = \cos.\alpha', \frac{y'-b'}{p'} = \cos.\beta', \frac{z'-c'}{p'} = \cos.\gamma'$$

$$\frac{x''-a''}{p''} = \cos.\alpha'', \frac{y''-b''}{p''} = \cos.\beta'', \frac{z''-c''}{p''} = \cos.\gamma''$$

il Sig. La Grange ricava l'espressioni del §. precedente, e ricava inoltre che gli angoli $\alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$ ec. avranno sempre la proprietà di essere

$$\cos.\alpha'^2 + \cos.\beta'^2 + \cos.\gamma'^2 = 1$$

$$\cos.\alpha''^2 + \cos.\beta''^2 + \cos.\gamma''^2 = 1$$

ec.

§. VI.

Per mezzo appunto di questa proprietà si estendono facilmente le espressioni predette del §. IV. anco alle differenze finite. In fatti o finite, o infinitesime che sieno le differenze sarà sempre

$$\Delta p' \cos.\alpha' = \Delta x' \qquad \Delta p'' \cos.\alpha'' = \Delta x''$$

$$\Delta p' \cos.\beta' = \Delta y' \qquad \Delta p'' \cos.\beta'' = \Delta y'' \qquad \text{ec.}$$

$$\Delta p' \cos.\gamma' = \Delta z \qquad \Delta p'' \cos.\gamma'' = \Delta z''$$

e moltiplicando respettivamente quelle equazioni per $\cos.\alpha'$, $\cos.\beta'$, $\cos.\gamma'$, $\cos.\alpha''$, $\cos.\beta''$, $\cos.\gamma''$, e sommandole a tre per tre avremo

$$\Delta p'(\cos.\alpha'^2+\cos.\beta'^2+\cos.\gamma'^2)$$
$$=\Delta x'\cos.\alpha'+\Delta y'\cos.\beta'+\Delta z'\cos.\gamma',$$

$$\Delta p''(\cos.\alpha''^2+\cos.\beta''^2+\cos.\gamma''^2)$$
$$=\Delta x''\cos.\alpha''+\Delta y''\cos.\beta''+\Delta z''\cos.\gamma''$$

ec.

onde

$$\Delta p'=\Delta x'\cos.\alpha'+\Delta y'\cos.\beta'+\Delta z'\cos.\gamma'$$
$$\Delta p''=\Delta x''\cos.\alpha''+\Delta y''\cos.\beta''+\Delta z''\cos.\gamma''$$

ec.

e siccome questo raziocinio non varia per essere l'istesse, o diverse le coordinate x', y', z', così resteranno estese alle differenze finite le espressioni del §. IV. anco quando i punti componenti il sistema in equilibrio sieno non uno solo, ma in numero comunque indefinito.

§. VII.

Premesso questo, considero che acciò il proposto punto sia in equilibrio conviene che non si possa muovere in veruna delle tre direzioni degli assi sopradescritti; quindi converrà che la somma delle forze nel senso di ciascheduno di tali assi sia $=0$. Ma la somma delle forze P', P'', P''', ec. decomposte secondo l'asse delle x diventa $P'\cos.\alpha'+P''\cos.\alpha''+P'''\cos.\alpha'''+$ ec. secondo l'asse dell' y diventa $P'\cos.\beta'+P''\cos.\beta''+P'''\cos.\beta'''+$ ec.; e secondo quello delle z diventa $P'\cos.\gamma'+P''\cos.\gamma''+P'''\cos.\gamma'''+$ ec. onde le condizioni dell' equilibrio saranno espresse dalle tre seguenti equazioni

$$P'\cos.\alpha'+P''\cos.\alpha''+\text{ec.}=0$$
$$P'\cos.\beta'+P''\cos.\beta''+\text{ec.}=0$$
$$P'\cos.\gamma'+P''\cos.\gamma''+\text{ec.}=0$$

§. VIII.

Essendo pertanto il punto in equilibrio, e verificandosi le tre precedenti equazioni suppongasi che sia dato un impulso al punto in questione, per cui esso percorra nel senso delle x lo spazio $\Delta x'$, nel senso delle y lo spazio $\Delta y'$, ed in quello delle z lo spazio $\Delta z'$. Moltiplico respettivamente per tali quantità le equazioni precedenti, e le sommo insieme, ed ottengo

$$\begin{aligned} 0=&\Delta x'(P'\cos.\alpha'+P''\cos.\alpha''+P'''\cos.\alpha'''+\text{ec.})\\ &+\Delta y'(P'\cos.\beta'+P''\cos.\beta''+P'''\cos.\beta'''+\text{ec.})\\ &+\Delta z'(P'\cos.\gamma'+P''\cos.\gamma''+P'''\cos.\gamma'''+\text{ec.})\end{aligned}$$

la quale equazione disposta in quest'altra maniera

$$
\begin{aligned}
o = & P'(\Delta x' \cos.\alpha' + \Delta y' \cos.\beta' + \Delta z' \cos.\gamma') \\
& + P''(\Delta x' \cos.\alpha'' + \Delta y' \cos.\beta'' + \Delta z' \cos.\gamma'') \\
& + P'''(\Delta x' \cos.\alpha''' + \Delta y \ \cos.\beta''' + \Delta z' \cos.\gamma''') \\
& + \text{ec.}
\end{aligned}
$$

e ricordandosi che generalmente hanno luogo le equazioni

$$
\begin{aligned}
\Delta p' &= \Delta x' \cos.\alpha' + \Delta y' \cos.\beta' + \Delta z' \cos.\gamma' \\
\Delta p'' &= \Delta x' \cos.\alpha'' + \Delta y' \cos.\beta'' + \Delta z' \cos.\gamma'' \\
\Delta p''' &= \Delta x' \cos.\alpha''' + \Delta y' \cos.\beta''' + \Delta z' \cos.\gamma''' \\
\text{ec.} & \qquad\qquad \text{ec.}
\end{aligned}
$$

avremo $P' \Delta p' + P'' \Delta p'' + P''' \Delta p''' + \text{ec.} = o$, che è l'istessa equazione dei momenti dedotta dal Principio delle Velocità Virtuali, subito che le differenze delle p', p'', p''' ec. si suppongano infinitesime.

§. IX.

Quì è notabile che non vi è alcuna ragione che obblighi a supporre il moto, e le conseguenti variazioni $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$ infinitesime, per ottenere l' equazione $P' \Delta p' + P'' \Delta p'' + \text{ec.} = o$, la quale adunque viene ad essere una proprietà inseparabile dall'equilibrio, e l'equazione dei momenti che esige le differenze infinitesime viene ad essere un caso particolare d' un'altra assai più generale, che è venuta a manifestarsi nel corso della ricercata dimostrazione di quella dei momenti.

§. X.

Il Sig. La Grange a pag. 9. della sua Meccanica analitica nota che „ Dans l'application de ce Principe (delle „ Velocità Virtuali) aux differentes Machines il ne faut „ considerer que les espaces parcourus dans le premier „ instant du mouvement, & qui sont proportionels aux „ vitesses virtuelles; autrement on n'auroit pas les veritables loix de l'equilibre. „ Dal che potrebbe parere che non si dovesse ammettere altro che la equazione differenziale dei momenti da lui ritrovata cioè $P'dp' + P''dp'' + P'''dp''' + \text{ec.} = 0$, e veramente se si parte dalla considerazione del movimento impresso al sistema, è chiaro che qualora questo movimento non sia infinitesimo le Velocità Virtuali non possono più essere proporzionali sempre agli spazi per causa dell'inegualità del moto, e perciò cade il principio a cui si appoggia quella equazione, la quale altronde offre tutti i comodi, che somministra il calcolo delle infinitesime differenze.

§. XI.

Ma l'altra equazione a differenze finite, che ho dimostrato parimente aver luogo cioè $P'\Delta p'+P''\Delta p''+$ ec. $=0$, e che per distinguerla da quella dei momenti del Sig. La Grange la chiamerò equazione delle forze, in questo caso di quante si vogliano forze applicate ad un punto si verifica egualmente, che quella dei momenti, e farò vedere, che in infiniti altri casi gode dell'istessa proprietà, e che in qualsivoglia sistema solido, o fluido quantunque essa non sia criterio indubitato dell' equilibrio, subito però che l'equilibrio sia dimostrato, quella equazione delle forze si può concepire, ed offre una proprietà dell' equilibrio, che non mi è noto essere stata da altri avvertita.

§. XII.

Frattanto trattandosi come sopra di un punto solo nascono immediatamente delle conseguenze non dispregevoli da questa equazione delle forze, e ne accennerò una per saggio. Date quante si vogliano forze P', P'', P''' ec. in equilibrio applicate nell' istesso punto, se da un punto qualunque nello spazio infinito si conducano delle perpendicolari nelle respettive direzioni delle linee p', p'' ec. le quali intercettino nelle predette linee le quantità $\Delta p'$, $\Delta p''$ ec. sarà sempre $P'\Delta p' + P''\Delta p'' +$ ec. $= 0$; dunque se dal dato punto a cui sono applicate le forze io conduco una linea di qualsivoglia grandezza, e direzione, e sopra essa come diametro costruisco una sfera, la quale con la sua superficie intersechi tutte le dette linee p', p'' ec. Qualora sia $= 0$ la somma dei prodotti di queste intercette moltiplicate per le respettive forze, sarà il punto dato in equilibrio, perchè per la natura della sfera le normali calate dall'altra estremità del diametro sulle p', p'' ec. s'incontreranno con esse alla superficie della medesima sfera.

§. XIII.

Venendo adesso alla considerazione di più di un punto agitato da varie forze suppongo primieramente le forze P', P'', P''' ec. applicate a qualsivogliano punti A, B, C ec. della retta AC (*Fig.* 1.) con la condizione, che le direzioni loro espresse dalle linee p', p'', p''', ec. eguali respettivamente ad AE, BF, CG, ec. sieno normali alla linea AC, e nell'istesso piano. Prendo nel piano delle forze, o sia delle linee p', p'', p''' ec. due assi normali fra loro, chiamando asse delle x quello parallelo alla direzione delle forze, e l'altro asse delle y. E' chiaro che le condizioni dell' equilibrio della data linea saranno espresse dalle due equazioni

$$(1)\quad P' + P'' + P''' + \text{ec.} = 0$$

$$(2)\quad y'\,P' + y''\,P'' + y'''\,P''' + \text{ec.} = 0$$

intendendo secondo l' uso accettato dal Sig. La Grange per y', y'', y''' ec. le coordinate prese nell' asse delle y, ed appartenenti al primo, secondo, terzo ec. punto della linea a cui sono applicate le forze.

§. XIV.

Suppongasi, che stando questa linea in equilibrio, attese le condizioni espresse dalle due preaccennate equazioni, l' equilibrio sia rotto per un impulso qualunque dato alla linea stessa parallelamente alla direzione delle forze, o sia all' asse delle x. Questa linea potrà concepire un moto composto di progressione parallelamente a se stessa, cioè nel senso delle x, per il qual moto sia pervenuta in A', B', C', ed abbia percorso nel senso delle x ciaschedun corpo la quantità $\Delta x'$; ed inoltre di rotazione, per cui percorra il primo corpo l' arco $A'\ A''$, il secondo l' arco $B'\,B''$ ec. intorno al punto M qualunque, in cui stabilisco (giacchè è arbitrario) il centro degli assi, che saranno

MY, MX. Ciò posto sarà $MA'=y'$, $MB'=y''$, $MC'=y'''$, e nell' equazione

$$(2)\quad y'P'+y''P''+y'''P'''+\text{ec.}=0$$

saranno le y', y'', y''' ec. proporzionali ai seni $A''a$, $B''b$, $C''c$ ec. degli archi descritti. Chiamo tali seni $\delta x'$, $\delta x''$, $\delta x'''$ ec. perchè in fatti saranno porzioni delle x; ed essendo

$$y':y''=\delta x':\delta x''$$
$$y'':y'''=\delta x'':\delta x'''$$
$$y''':y''''=\delta x''':\delta x''''$$

ec.

avremo

$$y'=y'\,\frac{\delta x'}{\delta x'}$$

$$y''=y'\,\frac{\delta x''}{\delta x'}$$

$$y'''=y'\,\frac{\delta x'''}{\delta x'}$$

$$y''''=y'\,\frac{\delta x''''}{\delta x'}$$

ec.

le quali saranno tante equazioni dipendenti dall' ipotesi dell' invariabilità delle distanze, e si noti questa circostanza, perchè simili equazioni di condizione ci saranno in seguito d' un uso importante.

§. XV.

Sostituisco questi valori nella equazione

$$(2)\ y'P'+y''P''+\text{ec.}=0$$

ed ottengo

$$\frac{y'}{\delta x'}(P'\delta x'+P''\delta x''+\text{ec.})=0$$

cioè

$$(3)\ P'\delta x'+P''\delta x''+P'''\delta x'''+\text{ec.}=0$$

Moltiplico adesso l' equazione (1) $P'+P''+\text{ec.}=0$ per $\Delta x'$, ed ottengo l'equazione

$$(4)\ P'\Delta x'+P''\Delta x'+P'''\Delta x'+\text{ec.}=0$$

Considero finalmente che $\Delta x'+\delta x'$ è lo spazio percorso nella direzione della propria forza dal primo corpo, e così $\Delta x'+\delta x''$, $\Delta x'+\delta x'''$ ec. sono gli spazi analoghi descritti dal secondo, terzo ec.; chiamo tali spazi dx', dx'', dx''' ec. e sommando le due equazioni (3), e (4) ottengo

$$P'dx'+P''dx''+P'''dx'''+\text{ec.}=0$$

equazione, che facendo dx', dx'', dx''' ec. respettivamente eguali a dp', dp'', dp''' ec. giacchè in questo caso le x sono nella direzione stessa delle p, che rappresentano generalmente le direzioni delle forze, diventa $P'dp'+P''dp''+\text{ec.}=0$ cioè quella dei momenti dedotta dal principio delle velocità virtuali, supponendo dp', dp'' ec. infinitesime.

§. XVI.

E' chiaro che ancor quì come nel caso di un punto solo non vi è condizione alcuna, che obblighi a considerare la variazione infinitesima, e che questa può essere quanto si voglia grande, di maniera che in questo caso l'equazione delle forze da me ritrovata ha luogo egualmente, che l'equazione dei momenti, e sono ambedue egualmente criterj dell'equilibrio.

§. XVII.

Sieno adesso (*Fig.* 2.) ai corpi B, C, A ec. applicate delle forze P', P'' ec. nell'istesso piano, ma le direzioni di esse p', p'', p''' ec. sieno inclinate alla linea AC, e tra loro parallele come indicano le linee AE, BF, CG ec. Io risolvo ciascheduna forza in due normali fra loro una parallela alla linea dei corpi, cioè all'asse delle y, l'altra all'asse delle x, e la somma delle prime componenti sarà $P' \cos. \beta' + P'' \cos. \beta'' +$ ec., la somma delle seconde sarà $P' \cos. \alpha' + P'' \cos. \alpha'' +$ ec. ponendo per α, e β i valori assegnati nell'articolo precedente.

§. XVIII.

E' noto che le condizioni dell' equilibrio di questi corpi saranno espresse dalle tre equazioni,

(1) $y'P'\cos.\alpha' + y''P''\cos.\alpha'' + y'''P'''\cos.\alpha''' + \text{ec.} = 0$

(2) $P'\cos.\alpha' + P''\cos.\alpha'' + P'''\cos.\alpha''' + \text{ec.} = 0$

(3) $P'\cos.\beta' + P''\cos.\beta'' + P'''\cos.\beta''' + \text{ec.} = 0$

mentre dalle forze $P'\cos.\beta'$, $P''\cos.\beta''$ ec. non può prodursi rotazione. Per le cose notate precedentemente se si dia nel piano delle forze un movimento alla linea dei corpi, e questa si porti in A', B', C' per moto progressivo tanto nel senso delle y quanto delle x, ed in oltre per una rotazione intorno ad un qualunque punto M, che prendo per centro degli assi MY, MX, si riduca in A'', B'', C'' ec. l'equazione (1) in virtù di questa rotazione si potrà trasformare facilmente, mentre come nel §. XIV. sarà

$$y' : y'' = \delta x' : \delta x''$$

$$y'' : y''' = \delta x'' : \delta x'''$$

ec.

e perciò avremo

$$y' = y'\frac{\delta x'}{\delta x'}$$

$$y'' = y'\frac{\delta x''}{\delta x'}$$

$$y''' = y'\frac{\delta x'''}{\delta x'}$$

ec.

onde sostituendo questi valori di y', y'' ec. nella equazione (1), e dividendola per $\frac{y'}{\delta x'}$ diventerà

$$(4)\ P' \cos. \alpha' \delta x' + P'' \cos. \alpha'' \delta x'' + P''' \cos. \alpha''' \delta x''' + \text{ec.} = 0$$

dove $\delta x'$, $\delta x''$, $\delta x'''$ ec saranno gli spazi percorsi nel senso delle x per il moto di rotazione.

§. XIX.

Considerando poi che ogni corpo abbia progredito della comune quantità $\Delta x'$ nel senso delle x, e della comune $\Delta y'$ nel senso delle y, e moltiplicando per quella quantità l'equazione (2), e per questa l'equazione (3), esse equazioni diventeranno

$$(5)\ P' \cos. \alpha' \Delta x' + P'' \cos. \alpha'' \Delta x' + P''' \cos. \alpha''' \Delta x' + \text{ec.} = 0$$

$$(6)\ P' \cos. \beta' \Delta y' + P'' \cos. \beta'' \Delta y' + P''' \cos. \beta''' \Delta y' + \text{ec.} = 0$$

ma ponendo $\Delta x' + \delta x' = d x'$, $\Delta x' + \delta x'' = d x''$, $\Delta x' + \delta x''' = d x'''$ ec. e sommando le due equazioni (4) e (5) le condizioni dell'equilibrio somministreranno queste due

$$(6)\ P' \cos. \beta' \Delta y' + P'' \cos. \beta'' \Delta y' + P''' \cos. \beta''' \Delta y' + \text{ec.} = 0$$

$$(7)\ P' \cos. \alpha' d x' + P'' \cos. \alpha'' d x'' + P''' \cos. \alpha''' d x''' + \text{ec.} = 0$$

§. XX.

Conviene adesso riflettere, che nella direzione dell' asse delle y, oltre il moto progressivo comune a tutti i corpi, ed espresso da $\Delta y'$, ciaschedun corpo in virtù del moto rotatorio avrà percorso gli spazietti $A'a$, $B'b$, $C'c$ ec. che chiameremo $\delta y'$, $\delta y''$, $\delta y'''$ ec. e dei quali bisogna far conto, giacchè non si ponno negligere come nel caso precedente, in cui per ipotesi nella direzione delle y non vi erano forze.

§. XXI.

Bisogna adunque dimostrare, che dalle condizioni dell' equilibrio, cioè dalle equazioni (1), (2), (3) ne nasca un' equazione della forma

$$P'\cos.\beta'\delta y'+P''\cos.\beta''\delta y''+P'''\cos.\beta'''\delta y'''+\text{ec.}=0$$

che aggiunta all' equazioni (6), (7), somministri la totalità dei moti in tutti i sensi. Si avverta pertanto che $\delta y'$, $\delta y''$, $\delta y'''$ ec. sono i seni versi degli archi descritti dai respettivi corpi, e che tali seni versi si esprimeranno come segue

$$y'\,\text{sin. ver.}\,m\,,\; y''\,\text{sin. ver.}\,m\,,\; y'''\,\text{sin. ver.}\,m\ \text{ec.}$$

supponendo m l' angolo di rotazione.

§. XXII.

Essendo per ipotesi $\sin.\alpha'=\cos.\beta'$, $\sin.\alpha''=\cos.\beta''$, $\sin.\alpha'''=\cos.\beta'''$ ec. e sussistendo per l' equilibrio l' equazione

$$(1)\; y'P'\cos.\alpha'+y''P''\cos.\alpha''+y'''P'''\cos.\alpha'''+\text{ec.}=0$$

è chiaro che sussisterà ancora l'equazione

$$y' P' \sin.\alpha' + y'' P'' \sin.\alpha'' + \text{ec.} = 0$$

cioè l'equazione ricercata

$$y' P' \cos.\beta' + y'' P'' \cos.\beta'' + y''' P''' \cos.\beta''' + \text{ec.} = 0$$

quando gli angoli α', α'', α''' ec. e per conseguenza β', β'', β''' saranno respettivamente eguali tra loro. In tal caso moltiplicando per sin. ver. m, avremo

$$y' \sin.\text{ver.}\, m P' \cos.\beta' + y'' \sin.\text{ver.}\, m P'' \cos.\beta'' +$$
$$y''' \sin.\text{ver.}\, m P''' \cos.\beta''' + \text{ec.} = 0,$$

e quindi per il §. precedente sussisterà l'equazione

$$P' \cos.\beta' \delta y' + P'' \cos.\beta'' \delta y'' + \text{ec.} = 0$$

la quale aggiunta all'equazione (6), e facendo

$$\Delta y' + \delta y' = d y'$$
$$\Delta y' + \delta y'' = d y''$$
$$\Delta y' + \delta y''' = d y'''$$
$$\text{ec.}$$

otterremo l'equazione

$$(9)\; P' \cos.\beta' d y' + P'' \cos.\beta'' d y'' + P''' \cos.\beta''' d y''' + \text{ec.} = 0.$$

§. XXIII.

Le condizioni adunque dell'equilibrio ci hanno somministrato le due equazioni (7), e (9); si rifletta ora, che sommate insieme (e ragionando come al §. VI, e ricordandosi quanto si avvertì intorno alle caratteristiche al §. III.) si dimostrerà facilmente essere

$$\begin{array}{ll} \cos.\alpha' dx' + \cos.\beta' dy' = dp' \\ \cos.\alpha'' dx'' + \cos.\beta'' dy'' = dp'' \\ \cos.\alpha''' dx''' + \cos.\beta''' dy''' = dp''' \\ \text{ec.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ec.} \end{array}$$

e perciò avremo finalmente

$$P'dp' + P''dp'' + P'''dp''' + \text{ec.} = 0,$$

che è l'equazione dei momenti dedotta dal Principio delle Velocità Virtuali, qualora le dp', dp'', dp''' ec. suppongansi infinitesime.

§. XXIV.

Si noti che ancòra in questo caso non vi è alcuna circostanza, che obblighi a prendere $\delta x'$, $\delta x''$, $\delta x'''$ ec. $\delta y'$, $\delta y''$, $\delta y'''$ ec. dx', dx'', dx''' ec. $\Delta y'$, $\Delta x'$ infinitesimi, e che per conseguenza la nostra equazione finita delle forze

$$P'\Delta p' + P''\Delta p'' + P'''\Delta p''' + \text{ec.} = 0$$

nasce dalle condizioni dell'equilibrio, ed ha luogo egualmente che l'equazione dei momenti del Sig. La Grange.

§. XXV.

Che se suppongasi il movimento dato alla linea dei corpi essere non già astretto alla condizione sopra enunciata, cioè che sia diretto secondo il piano delle forze, ma sia in qualunque direzione, di maniera che la linea stessa progredisca ancòra nel senso di un terzo asse z normale ai due primi, ed inoltre ruotasse intorno all'asse delle x, è manifesto che le condizioni del suo equilibrio oltre alle equazioni (1), (2), (3) sopranotate, potrebbe parere, che ne esigessero ancòra altre due, lo chè bisogna esaminare, perchè le idee sieno più chiare ne' seguenti più complicati casi. In fatti nella stessa guisa che le forze facendo con l'asse delle x gli angoli α', α'' ec. le abbiamo decomposte parallelamente a quest'asse nelle componenti $P' \cos.\alpha'$, $P'' \cos.\alpha''$, $P''' \cos.\alpha'''$, ec. così facendo le forze stesse con l'asse delle z gli angoli γ', γ'', γ''' ec. si decomporrebbero parallelamente a quest' asse nelle $P' \cos.\gamma'$, $P'' \cos.\gamma''$, $P''' \cos.\gamma'''$ ec. e così converrebbe alle tre equazioni sopraccennate aggiungerne una appartenente al moto progressivo nel senso delle z, cioè

$$P' \cos.\gamma' + P'' \cos.\gamma'' + P''' \cos.\gamma''' + \text{ec.} = 0$$

e un'altra appartenente al rotatorio intorno all' asse delle x, che sarebbe

$$P' \cos.\gamma' y' + P'' \cos.\gamma'' y'' + P''' \cos.\gamma''' y''' + \text{ec.} = 0;$$

ma per ipotesi le forze sono tutte parallele al piano delle x, y, ed essendo applicate alla medesima linea retta, sono anco tutte nel medesimo piano; dunque gli angoli γ', γ'', γ''' ec. sono tutti eguali a 90°, e perciò i loro coseni $= 0$, e quindi le equazioni, che pareva doversi aggiungere, svaniscono per le condizioni stesse del Problema. Si presenta ancòra una difficoltà, considerando, che per il moto impresso alla linea, questa potrebbe concepire rotazioni intorno ad assi non passanti per l'istesso punto; ma di questo si parlerà più opportunamente fra poco.

§. XXVI.

Considero inoltre applicate agli stessi corpi fissi in linea retta le forze P', P'' ec. le direzioni delle quali p', p'' ec. sieno qualunque. In tal caso prendo oltre i due assi delle x, e delle y (il quale asse delle y essendo arbitrario, lo prendo come sopra parallelo alla linea dei corpi) un terzo asse delle z, e riflettendo che per essere i corpi in linea retta parallela all'asse delle y, le forze $P' \cos.\beta'$,

$P'' \cos.\beta''$, ec. non possono produrre altro, che un moto di progressione, il moto di rotazione non potrà aver luogo, che in virtù delle altre forze, ed intorno ai soli due assi delle x, e delle z, e l'equazioni dell'equilibrio saranno

$$(1)\ P' \cos.\alpha' + P'' \cos.\alpha'' + P''' \cos.\alpha''' + \text{ec.} = 0$$

$$(2)\ P' \cos.\beta' + P'' \cos.\beta'' + P''' \cos.\beta''' + \text{ec.} = 0$$

$$(3)\ P' \cos.\gamma' + P'' \cos.\gamma'' + P''' \cos.\gamma''' + \text{ec.} = 0$$

$$(4)\ y'P' \cos.\alpha' + y''P'' \cos.\alpha'' + y'''P''' \cos.\alpha''' + \text{ec.} = 0$$

$$(5)\ y'P' \cos.\gamma' + y''P'' \cos.\gamma'' + y'''P''' \cos.\gamma''' + \text{ec.} = 0$$

§. XXVII.

Si concepisca dato un moto qualunque alla linea, in cui sono i punti agitati dalle date forze; ed in virtù di tal moto progrediscano i corpi nel senso dei tre assi delle quantità $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$, per le quali moltiplico respettivamente le prime tre equazioni, che diventano

$$(6)\ \Delta x' (P' \cos.\alpha' + P'' \cos.\alpha'' + P''' \cos.\alpha''' + \text{ec.}) = 0$$

$$(7)\ \Delta y' (P' \cos.\beta' + P'' \cos.\beta'' + P''' \cos.\beta''' + \text{ec.}) = 0$$

$$(8)\ \Delta z' (P' \cos.\gamma' + P'' \cos.\gamma'' + P''' \cos.\gamma''' + \text{ec.}) = 0$$

Di più abbiano i corpi un moto rotatorio intorno all'asse delle z, e per tal moto l'equazione (4) si trasforma per le ragioni sopraccennate in questa

$$(9)\ P' \cos.\alpha' \delta x' + P'' \cos.\alpha'' \delta x'' + P''' \cos.\alpha''' \delta x''' + \text{ec.} = 0;$$

e finalmente un moto rotatorio intorno all'asse delle x, in virtù del quale per una eguale ragione l'equazione (5) diventerà

$$(10)\ P' \cos.\gamma' \delta z' + P'' \cos.\gamma'' \delta z'' + P''' \cos.\gamma''' \delta z''' + \text{ec.} = 0$$

§. XXVIII.

Avanti di proseguire giova sciorre la difficoltà accennata in fine del §. XXV, e che potrebbe oscurare non solo il presente caso particolare, ma ancòra molto più la generale Teoría, che siamo in seguito per dimostrare. Potrebbe alcuno ragionare così. Concedasi che la linea dei corpi prenda due moti di rotazione, uno intorno all'asse delle z, e l'altro intorno a quello delle x, e che perciò l'equazione (4) si cangi nell'equazione (9), in virtù della continua proporzione tra le quantità y', y'', y''' ec. e le $\delta x'$, $\delta x''$, $\delta x'''$ ec.; ma acciò l'equazione (5) si cangi nell'equazione (10), conviene che abbia luogo la continua proporzione tra l'istesse quantità y', y'', y''' ec. e le $\delta z'$, $\delta z''$, $\delta z'''$ ec. e che in conseguenza il moto rotatorio intorno all'asse delle x sia tale, che il centro della rotazione di ciaschedun corpo sia all'istessa distanza y', y'', y''' ec. da ciascheduno dei corpi, a cui è il centro della rotazione intorno all'asse delle z; ora questo come può combinarsi colla supposizione fatta, che il moto impresso alla linea dei corpi sia qualunque, e quindi capace di farla girare intorno a due assi paralleli a quelli delle z, e delle x, ma passanti per punti diversi, o sia non intersecati tra loro, e perciò inegualmente distanti da un istesso qualunque corpo?

§. XXIX.

La difficoltà si può sopire in vari modi, ma semplicemente mi pare, che serva il dimostrare, che in ogni caso l'equazione (5) si trasforma nell'altra (10). In fatti segua la rotazione intorno ad un asse parallelo a quello delle x, ma situato a diversa distanza, e perciò le distanze dei corpi da esso non sieno altrimenti y', y'', y''' ec. ma $y' \pm m$, $y'' \pm m$, $y''' \pm m$, e perciò non sieno le $\delta z'$, $\delta z''$, $\delta z'''$ ec. proporzionali alle y', y'', y''' ec. ma bensì alle $y' \pm m$, $y'' \pm m$ ec. Ciò posto essendo per ipotesi

$$y' P' \cos.\gamma' + y'' P'' \cos.\gamma'' + y''' P''' \cos.\gamma''' + \text{ec.} = 0$$

sarà ancòra

$$(y' \pm m) P' \cos.\gamma' + (y'' \pm m) P'' \cos.\gamma'' + \text{ec.} = 0$$

mentre quest'ultima equazione posta sotto la forma

$$\left.\begin{array}{l} y' P' \cos.\gamma' + y'' P'' \cos.\gamma'' + y''' P''' \cos.\gamma''' + \text{ec.} \\ \pm m (P' \cos.\gamma' + P'' \cos.\gamma'' + P''' \cos.\gamma''' + \text{ec.}) \end{array}\right\} = 0$$

si manifesta non essere altro che la somma, o la differenza della medesima equazione (5), e dell' equazione (3), moltiplicata per m; ma verificandosi tale equazione, si verifica ancòra l'equazione (10); dunque l'equazione (10) dipende nonostante dall' equazione (5), ed avrà sempre luogo nell' ipotesi dell' equilibrio, quantunque sia altresì verissimo, che le y', y'', y''' ec. non siano proporzionali alle $\delta z'$, $\delta z''$, $\delta z'''$ ec.

§. XXX.

Riprendendo adesso il filo della dimostrazione, osservo, che nelle equazioni (6), e (9) facendo

$$\Delta x' + \delta x' = d x'$$

$$\Delta x' + \delta x'' = d x''$$

$$\Delta y' + \delta x''' = d x'''$$

ec.

e sommandole insieme si ottiene

$$(11)\ P' \cos.\alpha' d x' + P'' \cos.\alpha'' d x'' + P''' \cos.\alpha''' d x''' + \text{ec.} = 0$$

similmente nelle equazioni (8), e (10) facendo

$$\Delta z' + \delta z' = d z'$$

$$\Delta z' + \delta z'' = d z''$$

$$\Delta z' + \delta z''' = d z'''$$

ec.

e sommandole insieme abbiamo l'equazione

(12) $P' \cos. \gamma' dz' + P'' \cos. \gamma'' dz'' + P''' \cos. \gamma''' dz''' + \text{ec.} = 0$

onde i moti nel senso degli assi delle x, e z sono raccolti, e assegnati.

§. XXXI.

Venendo a quelli nel senso delle y, è chiaro, che oltre al moto progressivo $\Delta y'$ considerato nell'equazione (7), i corpi in questa direzione potranno avere altri moti dependenti dalle rotazioni intorno agli assi delle x, e delle z, e che tali moti saranno i seni versi degli angoli m, ed n descritti con ciascheduna di tali rotazioni, come per una rotazione sola fu avvertito nel caso della Figura seconda. Ma è notabile che nella presente occorrenza, non essendo le direzioni delle forze, parallele necessariamente per ipotesi ad alcuno dei tre piani degli assi, non si potrà supporre $\sin. \alpha' = \cos. \beta'$, $\sin. \alpha'' = \cos. \beta''$, $\sin. \alpha''' = \cos. \beta'''$ ec. e perciò il raziocinio adottato allora, non è adottabile adesso. E quantunque tanto in quel caso come in questo facendo eguali tra loro, gli angoli fatti dalle forze con ciaschedun' asse, e perciò $\alpha' = \alpha'' = \alpha'''$ ec., $\beta' = \beta'' = \beta'''$ ec., $\gamma' = \gamma'' = \gamma'''$ ec. si potrebbe con la divisione liberare direttamente ciascheduna equazione dalle funzioni di questi angoli, nondimeno credo utile il prendere un'altra strada per familiarizzarsi con queste formole, e per dedurre dal calcolo quale sia la necessità del parallelismo, perchè abbia luogo l'equazione delle forze.

§. XXXII.

Per ora adunque continuo a supporre gli angoli ineguali, e considero che le linee p', p'', p''' ec. che esprimono le direzioni delle forze, sieno proiettate nel piano delle x, y, e suppongo che tali respettive proiezioni facciano con l'asse delle x gli angoli r', r'', r''' ec. Ciò posto il Signor La Grange ha rimarcato a pag. 21. della Meccanica, che, per esempio, pel primo corpo, supposto che a', e b' sieno le coordinate dei centri delle forze, e che $\pi' = \sqrt{(x'-a')^2 + (y'-b')^2}$ sia la proiezione della p' sul piano delle x', y', sarà $\frac{x'-a'}{\pi'} = \cos. r'$, $\frac{y'-b'}{\pi'} = \sin. r'$; ma essendo $x'-a' = p' \cos. \alpha'$, $y'-b' = p' \cos. \beta'$ avremo

$$\pi' = p' \sqrt{\cos. \alpha'^2 + \cos. \beta'^2}\text{; ma } \cos. \alpha'^2 + \cos. \alpha'^2 = 1 - \cos. \gamma'^2\text{;}$$

dunque $\pi' = p' \sin. \gamma'$; e per conseguenza $\frac{\cos. \alpha'}{\sin. \gamma'} = \cos. r'$, $\frac{\cos. \beta'}{\sin. \gamma'} = \sin. r'$, sicchè finalmente $\cos. \alpha' = \sin. \gamma' \cos. r'$, $\cos. \beta' = \sin. \gamma' \sin. r'$.

§. XXXIII.

Ciò posto facendo l'istesso discorso per tutti i corpi avremo

$$\begin{array}{ll} \cos.\alpha' = \sin.\gamma' \cos.r' & \cos.\beta' = \sin.\gamma' \sin.r' \\ \cos.\alpha'' = \sin.\gamma'' \cos.r'' & \cos.\beta'' = \sin.\gamma'' \sin.r'' \\ \cos.\alpha''' = \sin.\gamma''' \cos.r''' & \cos.\beta''' = \sin.\gamma''' \sin.r''' \\ \text{ec.} & \text{ec.} \end{array}$$

e supponendo che le medesime linee p', p'', p''' ec. proiettate nel piano delle x, z facciano con l'asse delle x gli angoli s', s'', s''' ec. con un analogo raziocinio troveremo

$$\begin{array}{ll} \cos.\alpha' = \sin.\beta' \cos.s' & \cos.\gamma' = \sin.\beta' \sin.s' \\ \cos.\alpha'' = \sin.\beta'' \cos.s'' & \cos.\gamma'' = \sin.\beta'' \sin.s'' \\ \cos.\alpha''' = \sin.\beta''' \cos.s''' & \cos.\gamma''' = \sin.\beta''' \sin.s''' \\ \text{ec.} & \text{ec.} \end{array}$$

e supponendo che le proiezioni delle medesime linee p', p'', p''' ec. nel piano delle y, z facciano coll'asse delle y gli angoli t', t'', t''' ec. si otterrà

$$\begin{array}{ll} \cos.\beta' = \sin.\alpha' \cos.t' & \cos.\gamma' = \sin.\alpha' \sin.t' \\ \cos.\beta'' = \sin.\alpha'' \cos.t'' & \cos.\gamma'' = \sin.\alpha'' \sin.t'' \\ \cos.\beta''' = \sin.\alpha''' \cos.t''' & \cos.\gamma''' = \sin.\alpha''' \sin.t''' \\ \text{ec.} & \text{ec.} \end{array}$$

§. XXXIV.

Suppongo che i seni versi descritti dai corpi per l'angolo di rotazione m, intorno all' asse delle z, sieno $\delta y'$, $\delta y''$, $\delta y'''$ ec. eguali respettivamente a y' sin. ver. m, y'' sin. ver. m, ec., e che i seni versi dell'angolo n di rotazione intorno all'asse delle x sieno $\delta' y'$, $\delta' y''$, $\delta' y'''$, ec. eguali respettivamente a y' sin. ver. n, y'' sin. ver. n, ec.; e si noti che ho contrassegnato in quest'ultimi la caratteristica δ con un accento, per distinguere i moti descritti per una rotazione, da quelli descritti per l'altra, di maniera che $\delta y'$, è diverso da $\delta' y'$, $\delta y''$ da $\delta' y''$, e così degli altri.

§. XXXV.

Abbiamo dalle condizioni dell' equilibrio riportate al §. XXVI. l'equazioni (4), e (5), che con le formole del §. XXXIII. si trasformeranno in quest'altre due

$$(a) \quad y'P' \sin.\gamma' \cos.r' + y''P'' \sin.\gamma'' \cos.r'' + y'''P''' \sin.\gamma''' \cos.r''' + \text{ec.} = 0$$

$$(b) \quad y'P' \sin.\alpha' \sin.t' + y''P'' \sin.\alpha'' \sin.t'' + y'''P''' \sin.\alpha''' \sin.t''' + \text{ec.} = 0$$

e da qualunque delle due si dedurranno i casi, nei quali si verifica l'equazione

$$y'P'\cos.\beta'+y''P''\cos.\beta''+y'''P'''\cos.\beta'''+\text{ec.}=0$$

di cui ci serviremo per raccorre i moti occorsi secondo l'asse delle y.

§. XXXVI.

Le condizioni dell'equilibrio al sopraccitato §. XXVI. ci somministrano ancòra l'equazione (2), che per le formole del §. XXXIII. si trasforma in questa

$$(c) \quad P'\sin.\gamma'\sin.r'+P''\sin.\gamma''\sin.r''+ P'''\sin.\gamma'''\sin.r'''+\text{ec.}=0$$

ovvero in quest'altra

$$(d) \quad P'\sin.\alpha'\cos.t'+P''\sin.\alpha''\cos.t''+ P'''\sin.\alpha'''\cos.t'''+\text{ec.}=0$$

e la combinazione dell'equazione (a) con l'equazione (c), o della (b) con la (d), servirà all'oggetto nostro perfettamente.

§. XXXVII.

In fatti sussistendo l'equazione (a) sussisterà ancòra l'equazione

$$(e) \quad y'P'\sin.\gamma'\sin.r'+y''P''\sin.\gamma''\sin.r''+ y'''P'''\sin.\gamma'''\sin.r'''+\text{ec.}=0$$

qualora sia $r' = r'' = r'''$ ec. ma sussistendo l'equazione (e), avremo ancòra

(f) $y'P'\cos.\beta' + y''P''\cos.\beta'' + y'''P'''\cos.\beta''' + \text{ec.} = 0$,

equazione che avremmo parimente ottenuto, combinando le altre due equazioni (b), (d), e supponendo tra loro eguali gli angoli t', t'', t''' ec.

§. XXXVIII.

In qualunque pertanto dei due piani, o delle y, x, o delle y, z, le proiezioni delle direzioni delle forze si suppongano parallele, si avrà l'equazione (f), e quella moltiplicata per sin. ver. m, e ricordandosi che $\delta y' = y'$ sin. ver. m, $\delta y'' = y''$ sin. ver. m, $\delta y''' = y'''$ sin. ver. m, ec. somministrerà l'equazione

(13) $P'\cos.\beta'\delta y' + P''\cos.\beta''\delta y'' + P'''\cos.\beta'''\delta y''' + \text{ec.} = 0$;

ed inoltre l'istessa equazione (f) moltiplicata per sin. ver. n, e sovvenendosi che $\delta' y' = y'$ sin ver. n, $\delta' y'' = y''$ sin. ver. n, $\delta' y''' = y'''$ sin. ver. n ec. somministrerà l'equazione

(14) $P'\cos.\beta'\delta' y' + P''\cos.\beta''\delta' y'' + P'''\cos.\beta'''\delta' y''' + \text{ec.} = 0$.

§. XXXIX.

Sommando adunque insieme le equazioni (7), (13), e (14), e facendo

$$\Delta y' + \delta y' + \delta' y' = d y'$$

$$\Delta y' + \delta y'' + \delta' y'' = d y''$$

$$\Delta y' + \delta y''' + \delta' y''' = d y'''$$

ec.

avremo l' equazione

(15) $P' \cos. \beta' d y' + P'' \cos. \beta'' d y'' + P''' \cos. \beta''' d y''' + \text{ec.} = 0$,

ove tutti i moti nel senso delle y sono raccolti, e sommando insieme le tre equazioni (11), (12), e (15), in virtù delle solite formole

$$P' \cos. \alpha' d x' + P' \cos. \beta' d y' + P' \cos. \gamma' d z' = d p'$$

$$P'' \cos. \alpha'' d x'' + P'' \cos. \beta'' d y'' + P'' \cos. \gamma'' d z'' = d p''$$

ec.

ne risulterà finalmente l' equazione

$$P' d p' + P'' d p'' + P''' d p''' + \text{ec.}$$

che è quella dei momenti, qualora le $d p'$, $d p''$, $d p'''$ ec. si suppongano infinitesime.

§. XL.

Dunque data una quantità di punti, o corpi disposti in linea retta, a ciascheduno dei quali sieno applicate delle forze comunque, suppongasi che queste non sieno astrette ad altra condizione, che a quella di avere parallele tra loro, le respettive proiezioni fatte in un piano passante per la linea retta suddetta; in tal caso, se in qualunque parte dello spazio si concepisca una linea eguale alla proposta, in cui sono i punti agitati dalle forze, e da ciaschedun punto di questa nuova linea si conduca una normale sulla direzione della forza applicata all'analogo punto della proposta, e che tutte le intercette da ciascheduna di tali normali, moltiplicate per le respettive forze formino una serie di prodotti = o, la linea proposta sarà in equilibrio.

§. XLI.

Si vede che tanto in questo caso, quanto nel precedente acciò sussistano tutte le equazioni necessarie, non è dimostrato essere la condizione unica quella dell'egua-glianza tra gli angoli, che fanno le direzioni delle forze, onde questo potrebbe fare sperare, che l'equazione delle forze possa sussistere, anco prescindendo da qualunque parallelismo tra le direzioni delle forze, purchè i punti ai quali sono applicate sieno in linea retta.

§. XLII.

Per convalidare i nostri resultati ancòra con l'ispezione della figura, consideriamo adesso (*Fig.* 3.) i corpi *A*, *B*, *C*, ec. sempre nell' istesso piano, ma non più in linea retta, e disposti comunque in A, B, C. Sieno essi agitati dalle forze P', P'', P''' ec. nelle direzioni AE, BF, CG ec. parallele all'asse MX delle x, e per conseguenza normali all'asse delle y. E' chiaro, che le condizioni dell' equilibrio saranno, come nel caso della linea retta, espresse dalle equazioni

$$P' + P'' + P''' + \text{ec.} = 0$$

$$y' P' + y'' P'' + y''' P''' + \text{ec.} = 0;$$

ma se si dia un moto a quella linea ABC ec. che tiene legati i corpi, questo potrà come sopra esser composto di progressivo, e rotatorio, e quanto al progressivo non vi è alcuna varietà in esso dall'essere in linea retta, o non retta disposti i corpi; quanto al rotatorio poi si vede facilmente, che quando i corpi non sono in linea retta, gli spazi che ruotando descrivono nel senso delle forze P', P'' ec. non sono gli stessi, che con la stessa ruotazione descriverebbero se fossero in linea retta; e siccome tali spazi conviene che possano sostituirsi nella equazione

$$y' P' + y'' P'' + \text{ec.} = 0$$

invece delle y', y'' ec. così questo c' impegna nella necessità di conoscerne la natura, e la relazione che hanno tra loro.

§. XLIII.

A tale oggetto sieno (*Fig.* 4.) i due corpi a, e b situati non in linea retta rispetto ad un punto M, che sia il centro degli assi, ed agitati da forze p', p'' nelle direzioni aE, bF parallele all'asse delle x, e perciò normali a quello delle y, in cui prodotte le dette loro direzioni s'incontrino in A, e B, di modo che sia $MA = y'$, $MB = y''$; è chiaro che chiamando m', ed m'' gli angoli AMa, BMb, sarà $Ma = \frac{y'}{\cos. m'}$, $Mb = \frac{y''}{\cos. m''}$. Posto ciò, se il sistema, che tiene i due corpi si muove ruotando intorno all'asse delle z perpendicolare al piano delle x, y, e passante per M, e descrive l'angolo r, i punti A, B descriveranno nel senso delle forze, o sia parallelamente alle x, gli spazi $AA'' = y' \sin. r$, $BB'' = y'' \sin. r$, e perciò come sopra abbiamo rilevato saranno proporzionali alle y', y'', e tali spazi potranno sostituirsi, come sopra fu fatto nella equazione

$$y' P' + y'' P'' + \text{ec.} = 0$$

invece delle y', y'', ed ottenersi l'equazione trasformata, come nei casi precedenti. Ma mentre i punti A, e B anderanno in A', e B', i punti a, e b descriveranno il medesimo angolo r, ed anderanno in a', e b'; ma nel senso delle forze, lo spazio da essi percorso sarà ben differente. In fatti tale spazio sarà uguale per il corpo a, ad aa'', e per il corpo b sarà $= bb''$; ed analiticamente si vedrà, che per il corpo a sarà lo spazio descritto

$$\frac{y'}{\cos.\, m'}\left(\sin.(m'+r) - \sin.\, m'\right)$$

e per il corpo b sarà

$$\frac{y''}{\cos.\, m''}\left(\sin.(m''+r) - \sin.\, m''\right)$$

§. XLIV.

L'espressione di questo spazio descritto nel senso delle forze per un corpo qualunque del sistema situato in modo, che la linea, che lo congiunge col centro degli assi faccia con l'asse delle y l'angolo $m^{(\alpha)}$, e che appartenga alla coordinata $y^{(\alpha)}$, si esprimerà dunque generalmente così

$$\frac{y^{(\alpha)}}{\cos.\, m^{(\alpha)}}\left(\sin.(m^{(\alpha)}+r) - \sin.\, m^{(\alpha)}\right)$$

e questa formola si trasformerà facilmente in quest'altra

$$y^{(\alpha)} \sin.\, r - y^{(\alpha)} (1 - \cos.\, r) \tang.\, m^{(\alpha)};$$

ma siccome il corrispondente punto nell'asse delle y descriverebbe con l'istessa rotazione r nel senso delle forze, lo spazio $y^{(\alpha)} \sin.\, r$, si vede subito, che il punto situato con tali condizioni fuori dell'asse, descrive uno spazio minore, perchè sempre sarà $1 > \cos. r$, e che tali due spazi si riducono eguali nel caso, in cui sia $r = \frac{1}{\infty}$, nel qual caso $\sin. r = r$, $\cos. r = 1$, ed allora per conseguenza si potranno trattare gli spazi descritti da questi corpi, come se fossero descritti dai medesimi corpi, ma situati nell'asse delle y, ed ecco la prima causa di necessità geometrica (la chiamo così per distinguerla dalla meccanica notata dal Signor La Grange, ed accennata di sopra) che obbliga a considerare infinitesimo il movimento da darsi al sistema, volendo che l'equazione dei momenti dedotta dal Principio delle Velocità Virtuali, sia vera generalmente in ogni caso.

§. XLV.

E' però da notarsi, che vi sono infiniti casi, nei quali il moto rotatorio può esser finito, e non esistere i corpi nella linea retta normale alle forze, ed essere reperibile l'equazione delle forze, e quella dei momenti dedotta dal Principio delle Velocità Virtuali. In fatti date le due equazioni

$$y' P' + y'' P'' + \text{ec.} = 0$$

$$P' + P'' + \text{ec.} = 0$$

si tratta di esaurire tutti i casi, nei quali la quantità $y^{(\alpha)} (\sin. r - (1 - \cos. r) \tang. m^{(\alpha)})$ sostituita successivamente in luogo delle y', y'' ec. nella prima delle due precedenti equazioni produca una quantità $= 0$, quando sono date le due sopranotate equazioni.

§. XLVI.

Si è già rilevato, che il caso più generale, ed ovvio, in cui ha luogo questa sostituzione, occorre quando $r = \frac{1}{\infty}$. Vi è inoltre il caso in cui l'angolo $m^{(\alpha)}$ sia comune a tutti i punti in questione, mentre allora essendo questo angolo, come l'angolo r, quantità costante, facendo $\sin. r - (1 - \cos. r) \text{tang.} m^{(\alpha)} = q$, e sostituendo $y^{(\alpha)} q$ successivamente in vece di y', y'', y''' ec. nell'equazione $y' P' + y'' P'' +$ ec. $= 0$, si avrà l'istessa equazione moltiplicata per q, e perciò sussistendo la proposta, sussisterà ancòra la trasformata; ma si conosce facilmente, che quando $m^{(\alpha)}$ è costante, facendo tutte le linee, che vanno dai vari corpi al centro degli assi l'angolo medesimo, i corpi sono in linea retta; dunque si conclude, che essendo i corpi disposti in linea retta, quantunque non normale alle direzioni delle forze tra loro parallele, il moto non è necessario, che sia infinitesimo, e l'equazione delle forze ha luogo egualmente che l'equazione dei momenti, la quale esige il moto infinitesimo, come ai §§. precedenti per altra strada abbiamo potuto rilevare.

§, XLVII.

Si potrebbe ancòra considerare un'altra serie di casi, nei quali date le due equazioni

$$y' P' + y'' P'' + y''' P''' + \text{ec.} = 0$$

$$P' + P'' + P''' + \text{ec.} = 0$$

sostituendo per y', y'', y''' ec. la quantità $y^{(\alpha)}$ moltiplicata, o aggiunta ad una funzione data F, cosicchè $y^{(\alpha)} F$, esprimesse lo spazio descritto dai vari corpi, si ottenesse una trasformata $= 0$, e venisse a crescere il numero dei casi, nei quali il moto da darsi al sistema non occorresse che fosse infinitesimo, ma potesse essere qualunque finito. Questa discussione piuttosto interessante l'analisi, che la meccanica, giova omettere adesso, e soltanto noteremo una forma, che potrebbe avere $y^{(\alpha)} F$ per ottenere tale intento.

§. XLVIII.

La forma più ovvia, che subito si presenta sarebbe quella, in cui i vari corpi descrivessero spazi espressi dalla funzione $q y^{(\alpha)} \pm s$, ponendo, come si è supposto sopra, successivamente per (α) uno, due, tre, accenti, secondo che si riferisce al primo, secondo, terzo ec. corpo. In fatti eseguita la sostituzione nella equazione $y' P' + y'' P'' +$ ec. $= 0$, avremo

$$q\,(y' P' + y'' P'' + y''' P''' + \text{ec.}) \pm$$
$$s\,(P' + P'' + P''' + \text{ec.}) = 0,$$

onde sussistendo le due proposte, sussiste ancòra la trasformata.

§. XLIX.

Ritornando pertanto al primo oggetto di questa discussione, si può concludere, che qualora i corpi non sieno situati in linea retta, e per conseguenza gli spazi da essi percorsi per il moto impresso al sistema, non sieno proporzionali, e non si possano sostituire alle y', y'', y''' ec., sarà espediente il ristringere l'ipotesi di un moto qualunque da imprimersi al sistema, e ridurla ad un moto qualunque, ma infinitesimo, o sia considerare il solo primo istante di esso moto, conforme allo spirito del metodo delle Velocità Virtuali; nel qual caso, come abbiamo veduto, la sostituzione sopra notata può eseguirsi, e per conseguenza ricavarsi dalle condizioni dell'equilibrio l'equazione dei momenti dipendente dal Principio delle Velocità Virtuali.

§. L.

Si osservino adesso sulla medesima *Fig.* 4. gli spazi, che percorreranno gli stessi punti a, b, nel senso delle y, mentre nel senso delle x hanno percorso gli spazi aa'', bb'' espressi analiticamente come sopra. E' chiaro che nel senso delle y, con la medesima rotazione r, i punti α, e β, (corrispondenti ai medesimi corpi a, b) nell'asse delle x, descriveranno nel senso delle y gli spazi $x' \sin. r$, $x'' \sin. r$, ed i punti a, e b descriveranno nell'istesso senso gli spazi

$$x' \sin. r + x'(1 - \cos. r) \operatorname{cotang.} m'$$
$$x'' \sin. r + x''(1 - \cos. r) \operatorname{cotang.} m''$$

§. LI.

Quindi un qualunque punto corrispondente all'indice (α), che abbiam visto nel senso delle x descriverebbe lo spazio

$$y^{(\alpha)} \sin. r - y^{(\alpha)}(1 - \cos. r) \operatorname{tang.} m^{(\alpha)},$$

descriverà nel senso delle y lo spazio

$$x^{(\alpha)} \sin. r + x^{(\alpha)}(1 - \cos. r) \operatorname{cotang.} m^{(\alpha)},$$

e per conseguenza il primo sarà sempre minore di quello, che con l'istessa rotazione descrive il corrispondente punto dell'asse delle y, ed il secondo maggiore di quello, che descrive il corrispondente punto dell'asse delle x; e tanto quello, che questo saranno proporzionali agli spazi descritti dai sopraddetti corrispondenti punti nel caso di $r = \frac{1}{\infty}$; e finalmente qualora sia l'angolo $m = 45^\circ$, cioè la linea dei corpi sia egualmente inclinata a ciascheduno degli assi, gli spazi sopra descritti diventeranno

$$y^{(\alpha)} \sin. r - y^{(\alpha)} (1 - \cos. r)$$

$$x^{(\alpha)} \sin. r + x^{(\alpha)} (1 - \cos. r)$$

§. LII.

Premesso tutto ciò è facile passare ad un caso più complicato dei precedenti, ed a tal fine suppongo, che a quanti si vogliano punti di un piano sieno applicate delle forze parallele al piano stesso, che per esempio, sia quello delle x, y. L'equazioni necessarie per l'equilibrio saranno primieramente le due appartenenti al moto di traslazione, cioè

$$(1) \quad P' \cos. \alpha' + P'' \cos. \alpha'' + P''' \cos. \alpha''' + \text{ec.} = 0$$

$$(2) \quad P' \cos. \beta' + P'' \cos. \beta'' + P''' \cos. \beta''' + \text{ec.} = 0;$$

quanto poi al moto di rotazione, esso esigerà una equazione sola, ma più composta di ciascheduna di quelle esaminate fin quì, ed è facile convincersi, che avrà la forma seguente

$$(3)\ P'(\cos.\alpha' y' - \cos.\beta' x') + P''(\cos.\alpha'' y'' - \cos.\beta' x') + P'''(\cos.\alpha''' y''' + \cos.\beta''' x''') + \text{ec.} = 0.$$

§. LIII.

Supposto il sistema in equilibrio, e che gli sia dato un urto per cui progredisca nel senso delle x, e delle y respettivamente delle quantità comuni a tutti i punti $\Delta x'$, e $\Delta y'$, le due equazioni (1), e (2) diventeranno al solito

$$(4)\ \Delta x'(P'\cos.\alpha' + P''\cos.\alpha'' + P'''\cos.\alpha''' + \text{ec.}) = 0$$

$$(5)\ \Delta y'(P'\cos.\beta' + P''\cos.\beta'' + P'''\cos.\beta''' + \text{ec.}) = 0.$$

§. LIV.

Quanto alla trasformazione dell'equazione (3), si osservi primieramente che essa può mettersi sotto la forma

$$P'\cos.\alpha' y' + P''\cos.\alpha'' y'' + P'''\cos.\alpha''' y''' + \text{ec.}$$
$$-(P'\cos.\beta' x' + P''\cos.\beta'' x'' + P'''\cos.\beta''' x''' + \text{ec.}) = 0,$$

ed inoltre, che dando un moto al sistema si descriveranno nel primo istante del movimento per il moto rotatorio intorno ad un asse normale al piano proposto, (e che suppongo, essendo arbitrario, che passi per il centro degli assi delle x, e y) si descriveranno, dico, dai vari punti nelle direzioni parallele agli assi suddetti gli spazi infinitesimi $\delta x'$, $\delta x''$, $\delta x'''$ ec. $\delta y'$, $\delta y''$, $\delta y'''$ ec., e che essendo infinitesimi, per quello che si è dimostrato al §. XXX. e seguenti, avranno luogo le analogie

$$y' : y'' = \delta x' : \delta x''$$

$$y' : y''' = \delta x' : \delta x'''$$

ec.

$$x' : x'' = \delta y' : \delta y''$$

$$x' : x''' = \delta y' : \delta y'''$$

ec.

onde avremo

$$y' = \frac{y'\,\delta x'}{\delta x'}$$

$$y'' = \frac{y'\,\delta x''}{\delta x'}$$

$$y''' = \frac{y'\,\delta x'''}{\delta x'}$$

ec.

$$x' = \frac{x'\,\delta y'}{\delta y'}$$

$$x'' = \frac{x'\,\delta y''}{\delta y'}$$

$$x''' = \frac{x'\,\delta y'''}{\delta y'}$$

ec.

e sostituendo queste quantità nella equazione precedente, essa diventa

$$(6)\quad \frac{y'}{\delta x'}(P'\delta x' \cos.\alpha' + P''\delta x'' \cos.\alpha'' + P'''\delta x''' \cos.\alpha''' + \text{ec.})$$

$$- \frac{x'}{\delta y'}(P'\delta y' \cos.\beta' + P''\delta y'' \cos.\beta'' + P'''\delta y''' \cos.\beta''' + \text{ec.}) = 0.$$

§. LV.

Si osservi che ad oggetto di dedurre da questa equazione quella dei momenti, conviene liberarla dalle quantità $\frac{y'}{\delta x'}$, $\frac{x'}{\delta y'}$, che moltiplicano i due membri di essa, ed impediscono d' instituire, come nei casi precedenti abbiamo fatto le equazioni

$$dp' = \cos.\alpha'\, dx' + \cos.\beta'\, dy'$$
$$dp'' = \cos.\alpha''\, dx'' + \cos.\beta''\, dy''$$
ec.

§. LVI.

Questo ostacolo si può superare direttamente considerando, che le quantità $\frac{y'}{\delta x'}$, $\frac{x'}{\delta y'}$ appellano al primo punto del sistema proposto, e che questo primo punto in virtù del moto di rotazione non può scostarsi dal centro della rotazione medesima, dal qual centro esso è distante della quantità $\sqrt{x'^2 + y'^2}$ la quale quantità appunto perchè non può variare, deve essere per esprimere questa condizione posta eguale ad una costante; avremo adunque

$$\sqrt{(x'^2 + y'^2)} = \text{cost.}$$

onde differenziando con le caratteristiche δ, sarà $x'\delta x' + y'\delta y' = 0$

e perciò $\frac{x'}{\delta y'} = -\frac{y'}{\delta x'}$, e quindi sostituendo una di queste quantità per l'altra nell'equazione precedente, essa si ridurrà a questa

$$(7)\quad P'\delta x' \cos.\alpha' + P''\delta x'' \cos.\alpha'' + P'''\delta x''' \cos.\alpha''' + \text{ec.}$$
$$+ P'\delta y' \cos.\beta' + P''\delta y'' \cos.\beta'' + P'''\delta y''' \cos.\beta''' + \text{ec.} = 0$$

§. LVII.

Sommando adesso le due equazioni (4), e (5) con l'equazione (7), e facendo

$$dx' = \Delta x' + \delta x'$$
$$dx'' = \Delta x' + \delta x''$$
$$dx''' = \Delta x' + \delta x'''$$
$$\text{ec.}$$
$$dy' = \Delta y' + \delta y'$$
$$dy'' = \Delta y' + \delta y''$$
$$dy''' = \Delta y' + \delta y'''$$
$$\text{ec.}$$

e ricordandosi, che

$$dp' = \cos.\alpha'\, dx' + \cos.\beta'\, dy'$$
$$dp'' = \cos.\alpha''\, dx'' + \cos.\beta''\, dy''$$
$$\text{ec.}$$

otterremo

$$P'dp' + P''dp'' + P'''dp''' + \text{ec.} = 0$$

che è l'equazione dei momenti che si ricerca.

§. LVIII.

Conviene notare che in questo caso per ottenere l'equazione dei momenti, oltre alla necessità di considerare la rotazione infinitesima, per causa che manca la condizione della rettilinea disposizione dei punti, o corpi, è comparsa ancòra un altra necessità di fare l'istessa supposizione per toglier di mezzo le due quantità $\frac{y'}{\delta x'}$, $\frac{x'}{\delta y'}$, lo che abbiamo ottenuto differenziando $\sqrt{(x'^2+y'^2)}$ a differenze infinitesime; onde $\delta x'$, $\delta y'$ ec. è stato tacitamente per la natura della questione necessario considerarle infinitesime, perchè la quantità suddetta, se non si fossero prese le differenze infinitesime, non avrebbe somministrato $\frac{y'}{\delta x'} = -\frac{x'}{\delta y'}$. Ed ecco adunque due cause procedenti non da affezioni meccaniche, ma soltanto geometriche (e le chiamo così, comecchè originate da una situazione, o figura del sistema) delle quali non trovo alcuno, che fino ad ora abbia fatto menzione, e che obbligano generalmente parlando a considerare una rotazione infinitesima, volendo che si verifichi sempre l'equazione dei momenti, in conseguenza dell'equilibrio.

§. LIX.

E' tuttavia da considerarsi, che questi due casi rientrano molte volte uno nell'altro; perchè quando i punti non sono in linea retta, la rotazione dee essere infinitesima, e allora per la natura della questione si ha senza altra considerazione l'obbligo di prendere $\delta x'$, $\delta y'$ infinitesime, nel differenziare la quantità costante $\sqrt{(x'^2+y'^2)}$, e si ottiene dunque direttamente l'equazione $\frac{y}{\delta x'} = -\frac{x'}{\delta y'}$.

§. LX.

Dal differenziare a differenze infinitesime la quantità

$$\sqrt{(x'^2+y'^2)}$$

che abbiamo supposta per la natura della questione eguale ad una costante, si è potuta ricavare l'equazione

$$x'\delta x'+y'\delta y'=0,$$

la quale fissando la ragione fra i differenziali delle coordinate prodotti dalla rotazione, interesserà moltissimo le cose da dimostrarsi nella seconda parte. Giova pertanto illustrare, e confermare questa ragione tra i detti differenziali, lo che si otterrà con la contemplazione della Figura quinta.

§. LXI.

Dati i due assi delle x, y, cioè MX, MY intorno al centro M, dei quali il corpo corrispondente alle coordinate $ME = x'$, $MD = y'$ si supponga descrivere un arco di cerchio nel piano dei due assi, ed abbia descritto l'arco AbB. E`chiaro che CB, CA saranno gli spazi, che con tale rotazione avrà percorso il corpo nel senso delle x, ed in quello delle y; ed è altresì evidente, che se lo spazio CB sarà stato in aumento della coordinata x, lo spazio CA sarà in decremento della respettiva coordinata y, e viceversa; di maniera che paragonando tra loro le variazioni di tali coordinate secondo che quelle si supporranno positive, o negative, converrà al contrario assumere queste negative, o positive; tanto sia detto rispetto alla qualità dei segni appartenenti alle due variazioni, o differenziali.

§. LXII.

Inoltre è chiaro, che se l'arco AbB sia finito, le quattro linee ME, MD, AC, CB non possono mai essere tra loro proporzionali; al contrario se l'arco descritto dal corpo sia infinitesimo come Ab, di maniera che si confonda con la tangente AF normale al raggio AM, gli spazi percorsi nel senso delle coordinate saranno parimente infinitesimi, ed avremo $bc = \delta x'$, $cA = -\delta y'$, supponendo tali variazioni infinitesime. Ma essendo in tal caso simili tra loro i due triangoli MAD, bcA, avremo $MD : DA = cb : cA$, cioè $y' : x' = \delta x' : -\delta y'$, e quindi l' equazione $x'\delta x' + y'\delta y' = 0$, che abbiamo allora dedotta dalla considerazione della costante distanza del corpo rotante dal centro della rotazione, e dalla quale nasce l' equazione $\frac{y'}{\delta x'} = -\frac{x'}{\delta y'}$, di cui abbiamo veduto essere uopo, per condursi dalla ipotesi, e dalle equazioni dell' equilibrio, a quella dei momenti.

§. LXIII.

Da questo caso assai generale deduciamone uno dei particolari esaminati sopra, e riduciamo le equazioni (1), (2), (3) a rappresentare i punti, o corpi disposti in linea retta; è facile il vedere, che se questa retta in cui si suppongono i corpi faccia con l' asse delle y l' angolo m, e supponendo che a', a'', a''' ec. sieno gli angoli che fanno le direzioni delle forze con la linea dei corpi, sarà

$$\begin{aligned} \beta' &= m + a' & \alpha' &= 90^\circ - m - a' \\ \beta'' &= m + a'' & \alpha'' &= 90^\circ - m - a'' \\ \beta''' &= m + a''' & \alpha''' &= 90^\circ - m - a''' \end{aligned}$$

e quindi

$$\cos.\beta' = \cos.m \cos.a' - \sin.m \sin.a'$$

$$\cos.\beta'' = \cos.m \cos.a'' - \sin.m \sin.a''$$

ec.

$$\cos.\alpha' = \cos.(90° - m)\cos.a' + \sin.(90° - m)\sin.a'$$

$$\cos.\alpha'' = \cos.(90° - m)\cos.a'' + \sin.(90° - m)\sin.a''$$

ec.

cioè

$$\cos.\alpha' = \sin.m \cos.a' + \cos.m \sin.a'$$

$$\cos.\alpha'' = \sin.m \cos.a'' + \cos.m \sin.a''$$

ec.

§. LXIV.

Trasformeremo adunque in questa ipotesi l'equazione (3), (giacchè delle altre due, cioè delle (1) e (2) non occorre far parola, perchè si referiscono soltanto ai moti progressivi) e diventerà

$$\begin{aligned}
&+ P'y'(\sin.m \cos.a' + \cos.m \sin.a')\\
&+ P''y''(\sin.m \cos.a'' + \cos.m \sin.a'')\\
&+ \text{ec.}\\
&- P'x'(\cos.m \cos.a' - \sin.m \sin a')\\
&- P''x''(\cos.m \cos.a'' - \sin.m \sin.a'')\\
&- \text{ec.} = 0,
\end{aligned}$$

e qualora suppongasi $m = 45°$, cioè la linea dei corpi egualmente inclinata ad ambedue gli assi, l' equazione stessa diventa

$$
\begin{aligned}
&+P'y'(\cos. a'+\sin. a')\\
&+P''y''(\cos. a''+\sin. a'')\\
&+\text{ec.}\\
&-P'x'(\cos. a'-\sin. a')\\
&-P''x''(\cos. a''-\sin. a'')\\
&-\text{ec.}=0.
\end{aligned}
$$

§. LXV.

In questo stato di cose dando una rotazione finita alla linea dei corpi nel piano delle x, y, si è notato sopra che sussisterà la sostituzione delle $\delta y'$, $\delta y''$ ec. in luogo x', x'' ec. e delle $\delta x'$, $\delta x''$ ec. in luogo delle y', y'' ec., perchè i corpi sono disposti in linea retta, e dunque l' equazione precedente diventerà

$$
\frac{y'}{\delta x'}\Big(\delta x'(\cos. a'+\sin. a')+\delta x''(\cos. a''+\sin. a'')+\text{ec.}\Big)
$$
$$
-\frac{x'}{\delta y'}\Big(\delta y'(\cos. a'-\sin. a')+\delta y''(\cos. a''-\sin. a'')+\text{ec.}\Big)=0;
$$

ma si è veduto che in questa ipotesi abbiamo

$$\delta x' = y'(\sin. r - 1 + \cos. r) = y'(\sin. r - \sin. \text{ver}. r)$$
$$\delta y' = x'(\sin. r + 1 - \cos. r) = x'(\sin. r + \sin. \text{ver}. r)$$

dunque l' equazione si trasformerà finalmente in questa

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\sin.r-\sin.v.r}\left(\delta x'(\cos.a'+\sin.a')+\delta x''(\cos.a''+\sin.a'')+\text{ec.}\right) \\ -\frac{1}{\sin.r+\sin.v.r}\left(\delta y'(\cos.a'-\sin.a')+\delta y''(\cos.a''-\sin.a'')+\text{ec.}\right) \end{array}\right\}=0$$

§. LXVI.

Quindi volendo passare a ridurre i moti secondo gli assi, a quelli dp', dp'' ec. nelle direzioni delle forze, e liberare ambedue i membri di questa equazione dai fattori

$$\frac{1}{\sin.r+\sin.\text{ver}.r},\quad \frac{1}{\sin.r-\sin.\text{ver}.r}$$

si manifesta ciò aver luogo, quando questi si riducono eguali tra loro, cioè quando sin. ver. r è infinitesimo rispetto a sin. r, lo che accade quando $r=\frac{1}{\infty}$, nel qual caso il seno verso è un infinitesimo del secondo ordine.

§. LXVII.

Che se si credesse che la riduzione nelle direzioni delle forze, attesa la semplice forma della equazione trasformata, si potesse ottenere ancòra senza liberarla dai due fattori, si potrà esaurire il tentativo, e ridurlo alla discussione seguente. Date le equazioni

$$m'+n'=p'$$
$$m''+n''=p''$$
$$m'''+n'''=p'''$$

ec.

$$f m' + g n' = q' p'$$
$$f m'' + g n'' = q'' p''$$
$$f m''' + g n''' = q''' p'''$$
ec.

trovare i casi nei quali sia $q' = q'' = q'''$ ec.; mentre allora sussistendo l'equazione

$$\left.\begin{array}{r} f(m' + m'' + m''' + \text{ec.} \\ + g(n' + n'' + n''' + \text{ec.} \end{array}\right) = 0$$

sussisterebbe ancòra $p' + p'' + p''' + \text{ec.} = 0$

§. LXVIII.

A tale oggetto si osservi che sarà

$$q' = \frac{f m' + g n'}{p'} = \frac{f m' + g n'}{m' + n'}$$
$$q'' = \frac{f m'' + g n''}{p''} = \frac{f m'' + g n''}{m'' + n''}$$
ec.

e nel supposto di $q' = q''$ avremo

$$(f m' + g n')(m'' + n'') = (f m'' + g n'')(m' + n')$$

cioè

$$f m' m'' + g n' m'' + f m' n'' + g n' n'' =$$
$$f m'' m' + g n'' m' + f m'' n' + g n'' n'$$

ovvero $g n' m'' + f m' n'' = g n'' m' + f m'' n'$, e quindi $(g - f) m'' n'$ $= (g - f) m' n''$, e finalmente $m'' n' = m' n''$; dal che già si vede che la proposta eguaglianza tra le quantità q', q'', q''' ec. non dipende dalla natura dei coefficienti f, e g, ma dalle quantità m', m'', n', n'' ec., che debbono essere proporzionali.

§. LXIX.

Se adesso si osservi che nel caso nostro abbiamo

$$m' = \cos. a' + \sin. a', \qquad n' = \cos. a' - \sin. a'$$
$$m'' = \cos. a'' + \sin. a'', \qquad n'' = \cos. a'' - \sin. a''$$

onde

$$m''n' = (\cos. a'' + \sin. a'')(\cos. a' - \sin. a')$$
$$m'n'' = (\cos. a' + \sin. a')(\cos. a'' - \sin. a'')$$

e quindi

$\sin. a'' \cos. a' - \cos. a'' \sin. a' = \sin. a' \cos. a'' - \cos. a' \sin. a''$, cioè $\sin. (a'' - a') = \sin. (a' - a'')$, ed $a'' = a'$; per conseguenza si viene a confermare, che volendo dispensarsi dal liberare l'equazione dai sopra descritti fattori, è necessario il parallelismo tra le direzioni delle forze, almeno rispetto ad un piano passante per la linea dei corpi.

§. LXX.

Dallo sviluppo adunque di questo caso si viene a dimostrare per altra strada ciò, che sopra si è presentato, e che poteva restare ancòra meritevole d'illustrazione, cioè il seguente nuovo, e generale Teorema. *L'equazione delle forze avrà luogo egualmente che quella dei momenti, quando i corpi saranno stabiliti in linea retta, ed inoltre le forze comunque applicatevi, se non avranno le direzioni parallele tra loro, le avranno almeno tali, che sieno parallele le proiezioni di esse, fatte in un piano passante per la linea dei corpi.*

§. LXXI.

Considerando adesso con tutta la possibile generalità un sistema a distanze invariabili, e a quanti si vogliano punti del quale sieno applicate forze qualunque P', P'', P''' ec. con le direzioni p', p'', p''' ec., è chiaro che supposti i soliti tre assi delle x, y, z con i quali respettivamente le forze facciano gli angoli α', α'', α''' ec., β', β'', β''' ec., γ', γ'', γ''' ec., le equazioni necessarie per l'equilibrio di questo corpo saranno

$$(1)\quad P'\cos.\alpha' + P''\cos.\alpha'' + P'''\cos.\alpha''' + \text{ec.} = 0$$

$$(2)\quad P'\cos.\beta' + P''\cos.\beta'' + P'''\cos.\beta''' + \text{ec.} = 0$$

$$(3)\quad P'\cos.\gamma' + P''\cos.\gamma'' + P'''\cos.\gamma''' + \text{ec.} = 0$$

$$(4)\quad P'(\cos.\alpha' y' - \cos.\beta' x') + P''(\cos.\alpha'' y'' - \cos.\beta'' x'') + P'''(\cos.\alpha''' y''' - \cos.\beta''' x''') + \text{ec.} = 0$$

$$(5)\quad P'(\cos.\alpha' z' - \cos.\gamma' x') + P''(\cos.\alpha'' z'' - \cos.\gamma'' x'') + P'''(\cos.\alpha''' z''' - \cos.\gamma''' x''') + \text{ec.} = 0$$

$$(6)\quad P'(\cos.\beta' z' - \cos.\gamma' y') + P''(\cos.\beta'' z'' - \cos.\gamma'' y'') + P'''(\cos.\beta''' z''' - \cos.\gamma''' y''') + \text{ec.} = 0.$$

§. LXXII.

Moltiplico le prime tre per $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$, che sieno gli spazi, che progressivamente nel senso dei tre assi hanno percorso tutti i corpi, o punti del sistema per il moto impressoli per ipotesi, ed ottengo

$$(7)\quad (P'\cos.\alpha' + P''\cos.\alpha'' + P'''\cos.\alpha''' + \text{ec.})\,\Delta x' = 0$$

$$(8)\quad (P'\cos.\beta' + P''\cos.\beta'' + P'''\cos.\beta''' + \text{ec.})\,\Delta y' = 0$$

$$(9)\quad (P'\cos.\gamma' + P''\cos.\gamma'' + P'''\cos.\gamma''' + \text{ec.})\,\Delta z' = 0$$

§. LXXIII.

Quanto poi alle altre tre appartenenti al moto di rotazione (che per le cose sopra notate non potrà essere che infinitesimo) io osservo che l'equazione (4) si cangia in questa

$$(10)\quad \frac{y'}{\delta x'}(P'\cos.\alpha'\delta x' + P''\cos.\alpha''\delta x'' + P'''\cos.\alpha'''\delta x''' + \text{ec.}) - \frac{x'}{\delta y'}(P'\cos.\beta'\delta y' + P''\cos.\beta''\delta y'' + P'''\cos.\beta'''\delta y''' + \text{ec.}) = 0$$

mentre appartenendo al moto rotatorio intorno all' asse delle z, intorno al quale per il moto impresso al sistema i corpi avranno percorso gli spazietti $\delta x'$, $\delta x''$, $\delta x'''$ ec. $\delta y'$, $\delta y''$, $\delta y'''$ ec., si potrà sostituire per le cose notate precedentemente, in vece di x', x'', x''' ec., y', y'', y''' ec., le respettive quantità proporzionali, e si troverà $x' = x' \frac{\delta y'}{\delta y'}$, $x'' = x' \frac{\delta y''}{\delta y'}$, $x''' = x' \frac{\delta y'''}{\delta y'}$ ec., $y' = y' \frac{\delta x'}{\delta x'}$, $y'' = y' \frac{\delta x''}{\delta x'}$, $y''' = y' \frac{\delta x'''}{\delta x'}$ ec.

§. LXXIV.

In simil guisa si trasformerà l'equazione (5), che appartiene al moto di rotazione intorno all'asse delle y, intorno al quale, per il moto impresso al sistema, i corpi descriveranno gli spazietti $\delta' x'$, $\delta' x''$, $\delta' x'''$ ec., $\delta z'$, $\delta z''$, $\delta z'''$ ec.; ma quì si avverta, che gli spazietti descritti nel senso delle x per questa rotazione, possono (essendo qualunque per ipotesi il moto impresso) esser diversi da quelli descritti per la rotazione intorno all'asse delle z, e perciò ho in quelli posto la semplice caratteristica δ, là dove in questi descritti per la rotazione intorno all'asse delle y ho accentato la caratteristica, e così $\delta x'$, $\delta x''$ ec., $\delta' x'$, $\delta' x''$ ec. si riconoscono per differenti tra loro, come fu fatto sopra in simile occorrenza.

§. LXXV.

E' necessario ancòra rilevare, che per la rotazione intorno ad uno degli assi, e per esempio a quello delle z, si poteva supporre (come si è fatto nel trasformare l'equazione (4) nella (10), che gli spazietti $\delta x'$, $\delta x''$, $\delta x'''$ ec., $\delta y'$, $\delta y''$, $\delta y'''$ ec. fossero proporzionali alle y', y'', y''' ec., x', x'', x''' ec, potendosi far passare ovunque il centro dei tre assi; ma per trasformare l'equazione (5) la supposizione di simile proporzionalità non può generalmente assumersi, mentre, essendo arbitrario il moto dato al sistema, la rotazione intorno ad un asse parallelo alle y avrà luogo, ma non è obbligo che tal asse intersechi quello delle z, cioè che passi per il punto che si è scelto per centro degli assi, nel contemplare la rotazione intorno all'asse delle z. Potranno adunque le $\delta' x'$, $\delta' x''$, $\delta' x'''$ ec., $\delta z'$, $\delta z''$, $\delta z'''$ ec. essere proporzionali non già alle z', z'', z''' ec , x', x'', x''' ec., ma bensì ad altre linee qualunque della forma $z' \pm m$, $z'' \pm m$, $z''' \pm m$ ec., $x' \pm n$, $x'' \pm n$, $x''' \pm n$ ec., e non per questo sarà impedita la trasformazione della equazione (5), come facilmente si manifesterà seguendo le vedute esposte precedentemente in occasione analoga a questa.

§. LXXVI.

In fatti essendo proporzionali le quantità sopraccennate rispetto alle $\delta' x'$, $\delta' x''$, $\delta' x'''$ ec. $\delta z'$, $\delta z''$, $\delta z'''$ ec., sarà

$$z' \pm m = (z' \pm m) \frac{\delta' x'}{\delta' x'}$$

$$(z'' \pm m) = (z' \pm m) \frac{\delta' x''}{\delta' x'}$$

$$(z''' \pm m) = (z' \pm m) \frac{\delta' x'''}{\delta' x'}$$

ec.

e similmente

$$(x' \pm n) = (x' \pm n) \frac{\delta z'}{\delta z'}$$

$$x'' \pm n = (x' \pm n) \frac{\delta z''}{\delta z'}$$

$$x''' \pm n = (x' \pm n) \frac{\delta z'''}{\delta z'}$$

ec.

onde sarà

$$z' = (z' \pm m) \frac{\delta' x'}{\delta' x'} \mp m$$

$$z'' = (z' \pm m) \frac{\delta' x''}{\delta' x'} \mp m$$

$$z''' = (z' \pm m) \frac{\delta' x'''}{\delta' x'} \mp m$$

ec.

$$x' = (x' \pm n) \frac{\delta z'}{\delta z'} \mp n$$

$$x'' = (x' \pm n) \frac{\delta z''}{\delta z'} \mp n$$

$$x''' = (x' \pm n) \frac{\delta z'''}{\delta z'} \mp n$$

ec.

§. LXXVII.

Quindi l'equazione (5) si trasformerà in questa

$$\frac{z'\pm m}{\delta' x'}(P'\cos.\alpha'\delta' x'+P''\cos.\alpha''\delta' x''+P'''\cos.\alpha'''\delta' x'''+\text{ec.})$$

$$-\frac{x'\pm n}{\delta z'}(P'\cos.\gamma'\delta z'+P''\cos.\gamma''\delta z''+P'''\cos.\gamma'''\delta z'''+\text{ec.})$$

$$\mp m\,(P'\cos.\alpha'+P''\cos.\alpha''+P'''\cos.\alpha'''+\text{ec.})$$

$$\pm n\,(P'\cos.\gamma'+P''\cos.\gamma''+P'''\cos.\gamma'''+\text{ec.}=0,$$

ma i termini moltiplicati per m sono quelli dell'equazione (1) che per ipotesi si è veduto essere $=0$, e i termini moltiplicati per n sono parimente $=0$, perchè son quelli dell'equazione (3); dunque l'equazione (5) per quelle sostituzioni si trasformerà effettivamente in questa

$$(11)\ \frac{z'\pm m}{\delta' x'}(P'\cos.\alpha'\delta' x'+P''\cos.\alpha''\delta' x''+P'''\cos.\alpha'''\delta' x'''+\text{ec.})$$

$$-\frac{x'\pm n}{\delta z'}(P'\cos.\gamma'\delta z'+P''\cos.\gamma''\delta z''+P'''\cos.\gamma'''\delta z'''+\text{ec.})=0.$$

§. LXXVIII.

Parimente l'equazione (6) appartenente alla rotazione intorno all'asse delle x si trasformerà, considerando che l'infinitesima rotazione che nascerà intorno a quest'asse in virtù del moto impresso al sistema, farà percorrere ai corpi gli spazi $\delta' z'$, $\delta' z''$, $\delta' z'''$ ec., $\delta' y'$, $\delta' y''$, $\delta' y'''$ ec.,

(avvertendo che ancor quì le caratteristiche δ son virgolate per distinguere tali spazietti da quelli descritti nel senso delle z, e delle y, in virtù delle altre due sopradescritte rotazioni) e che quando questi spazietti non sieno proporzionali alle respettive coordinate y', y'', y''' ec. z', z'', z''' ec., ma sieno proporzionali alle quantità $y' \pm q$, $y'' \pm q$, $y''' \pm q$ ec., $z' \pm r$, $z'' \pm r$, $z''' \pm r$ ec., la trasformazione riescirà con eguale felicità.

§. LXXIX.

In effetto per tale proporzionalità facilmente si troverà, che avremo

$$y' \pm q = (y' \pm q) \frac{\delta' z'}{\delta' z'}$$

$$y'' \pm q = (y' \pm q) \frac{\delta' z''}{\delta' z'}$$

$$y''' \pm q = (y' \pm q) \frac{\delta' z'''}{\delta' z'}$$

ec.

$$z' \pm r = (z' \pm r) \frac{\delta' y'}{\delta' y'}$$

$$z'' \pm r = (z' \pm r) \frac{\delta' y''}{\delta' y'}$$

$$z''' \pm r = (z' \pm r) \frac{\delta' y'''}{\delta' y'}$$

ec.

e perciò

$$z' = (z' \pm r)\,\frac{\delta' y'}{\delta' y'} \mp r$$

$$z'' = (z' \pm r)\,\frac{\delta' y''}{\delta' y'} \mp r$$

$$z''' = (z' \pm r)\,\frac{\delta' y'''}{\delta' y'} \mp r$$

ec.

$$y' = (y' \pm q)\,\frac{\delta' z'}{\delta' z'} \mp q$$

$$y'' = (y' \pm q)\,\frac{\delta' z''}{\delta' z'} \mp q$$

$$y''' = (y' \pm q)\,\frac{\delta' z'''}{\delta' z'} \mp q$$

ec.

onde l' equazione (6) diventa

$$\frac{z' \pm r}{\delta' y'}(P'\cos.\beta'\delta' y' + P''\cos.\beta''\delta' y'' + P'''\cos.\beta'''\delta' y''' + \text{ec})$$

$$-\frac{y' \pm q}{\delta' z'}(P'\cos.\gamma'\delta' z' + P''\cos.\gamma''\delta' z'' + P'''\cos.\gamma'''\delta' z''' + \text{ec.})$$

$$\mp r\,(P'\cos.\beta' + P''\cos.\beta'' + P'''\cos.\beta''' + \text{ec.})$$

$$\pm q\,(P'\cos.\gamma' + P''\cos.\gamma'' + P'''\cos.\gamma''' + \text{ec.}) = 0\,,$$

ma i termini che in questa trasformata equazione si trovano moltiplicati per q costituiscono l'equazione (3), e quelli che si trovano moltiplicati per r, costituiscono l'equazione (2), onde sono separatamente per se medesimi $= 0$; dunque l'equazione (6) viene a ridursi alla seguente

$$(12)\ \frac{z'\pm r}{\delta' y'}(P'\cos.\beta'\delta' y'+P''\cos.\beta''\delta' y''+P'''\cos.\beta'''\delta' y'''+\text{ec.})$$

$$-\frac{y'\pm q}{\delta' z'}(P'\cos.\gamma'\delta' z'+P''\cos.\gamma''\delta' z''+P'''\cos.\gamma'''\delta' z'''+\text{ec.})=0$$

§. LXXX.

Si avverta adesso, che per quanto si è precedentemente dimostrato, inerendo alla supposizione del moto rotatorio infinitamente piccolo, ed alla necessità dell'esser sempre di senso contrario le quantità

$$\begin{array}{ll} \delta' y', & \delta' z' \\ \delta' x', & \delta z' \\ \delta x', & \delta y' \end{array}$$

ovvero a quanto nasce dalla supposizione delle invariabili distanze del respettivo centro di rotazione, avremo

$$x'\delta x'+y'\delta y'=0$$

$$(z'\pm m)\delta z'+(x'\pm n)\delta' x'=0$$

$$(z'\pm r)\delta' z'+(y'\pm q)\delta' y'=0$$

e ne seguirà per conseguenza, che sarà sempre nell'equazione (10) ...... $\dfrac{y'}{\delta x'}=-\dfrac{x'}{\delta y'}$

nella (11) ...... $\dfrac{z'\pm m}{\delta' x'}=-\dfrac{x'\pm n}{\delta z'}$

e nella (12)..... $\dfrac{z'\pm r}{\delta' y'}=-\dfrac{y'\pm q}{\delta' z'}$

onde sostituendo le prime quantità alle seconde in tutte tre le dette equazioni, e respettivamente dividendole per le medesime quantità $\frac{y'}{\delta x'}$, $\frac{z'\pm m}{\delta x'}$, $\frac{z'\pm r}{\delta' y'}$, avremo le medesime ridotte alle tre seguenti

$$(13)\ P'\cos.\alpha'\delta x'+P''\cos.\alpha''\delta x''+P'''\cos.\alpha'''\delta x'''+\text{ec.}$$
$$+P'\cos.\beta'\delta y'+P''\cos.\beta''\delta y''+P'''\cos.\beta'''\delta y'''+\text{ec.}=0$$
$$(14)\ P'\cos.\alpha'\delta' x'+P''\cos.\alpha''\delta' x''+P'''\cos.\alpha'''\delta' x'''+\text{ec.}$$
$$+P'\cos.\gamma'\delta z'+P''\cos.\gamma''\delta z''+P'''\cos.\gamma'''\delta z'''+\text{ec.}=0$$
$$(15)\ P'\cos.\beta'\delta' y'+P''\cos.\beta''\delta' y''+P'''\cos.\beta'''\delta' y'''+\text{ec.}$$
$$+P'\cos.\gamma'\delta' z'+P''\cos.\gamma''\delta' z''+P'''\cos.\gamma'''\delta' z'''+\text{ec.}=0$$

§. LXXXI.

Sommando adesso insieme queste tre equazioni, ne avremo una, che conterrà le condizioni delle occorse variazioni nel senso dei tre assi, per il moto rotatorio intorno a ciascheduno di essi, e sarà la seguente

$$(16)\ P'\cos.\alpha'(\delta x'+\delta' x')+P''\cos.\alpha''(\delta x''+\delta' x'')+$$
$$P'''\cos.\alpha'''(\delta x'''+\delta' x''')+\text{ec.}$$
$$+P'\cos.\beta'(\delta y'+\delta' y')+P''\cos.\beta''(\delta y''+\delta' y'')+$$
$$P'''\cos.\beta'''(\delta y'''+\delta' y''')+\text{ec.}$$
$$+P'\cos.\gamma'(\delta z'+\delta' z')+P''\cos.\gamma''(\delta z''+\delta' z'')+$$
$$P'''\cos.\gamma'''(\delta z'''+\delta' z''')+\text{ec.}=0.$$

§. LXXXII.

Sommo con questa equazione le tre equazioni (7), (8), (9), ed ottengo finalmente

$$(17)\ P'\cos.\alpha'(\Delta x'+\delta x'+\delta' x')+P''\cos.\alpha''(\Delta x'+\delta x''+\delta' x'')$$
$$+P'''\cos.\alpha'''(\Delta x'+\delta x'''+\delta' x''')+\text{ec.}$$
$$+P'\cos.\beta'(\Delta y'+\delta y'+\delta' y')+P''\cos.\beta''(\Delta y'+\delta y''+\delta' y'')$$
$$+P'''\cos.\beta'''(\Delta y'+\delta y'''+\delta' y''')+\text{ec.}$$
$$+P'\cos.\gamma'(\Delta z'+\delta z'+\delta' z')+P''\cos.\gamma''(\Delta z'+\delta z''+\delta' z'')$$
$$+P'''\cos.\gamma'''(\Delta z'+\delta z'''+\delta' z''')\ \text{ec.}=0,$$

la quale supponendo che la totalità dei moti secondo il senso dei tre assi sia dx', dx'', dx''' ec., dy', dy'', dy''' ec., dz', dz'', dz''', ec., e facendo perciò

$$\Delta x'+\delta x'+\delta' x'=dx'$$
$$\Delta x'+\delta x''+\delta' x''=dx''$$
$$\Delta x'+\delta x'''+\delta' x'''=dx'''$$
$$\text{ec.}$$
$$\Delta y'+\delta y'+\delta' y'=dy'$$
$$\Delta y'+\delta y''+\delta' y''=dy''$$
$$\Delta y'+\delta y'''+\delta' y'''=dy'''$$
$$\text{ec.}$$
$$\Delta z'+\delta z'+\delta' z'=dz'$$
$$\Delta z'+\delta z''+\delta' z''=dz''$$
$$\Delta z'+\delta z'''+\delta' z'''=dz'''$$
$$\text{ec.}$$

avremo

$$\begin{aligned}&P'(\cos.\alpha' dx' + \cos.\beta' dy' + \cos.\gamma' dz')\\ &+P''(\cos.\alpha'' dx'' + \cos.\beta'' dy'' + \cos.\gamma'' dz'')\\ &+P'''(\cos.\alpha''' dx''' + \cos.\beta''' dy''' + \cos.\gamma''' dz''')\\ &+ \text{ ec.} = 0,\end{aligned}$$

cioè essendo al solito

$$\begin{aligned}&\cos.\alpha' dx' + \cos.\beta' dy' + \cos.\gamma' dz' = dp'\\ &\cos.\alpha'' dx'' + \cos.\beta'' dy'' + \cos.\gamma'' dz'' = dp''\\ &\cos.\alpha''' dx''' + \cos.\beta''' dy''' + \cos.\gamma''' dz''' = dp'''\\ &\qquad\qquad\text{ec.}\end{aligned}$$

sarà

$$P'dp' + P''dp'' + P'''dp''' + \text{ec.} = 0,$$

che è l'equazione dei momenti dedotta dal Principio delle Velocità Virtuali.

§. LXXXIII.

Si può dunque concludere, che in ogni sistema, in cui l'equilibrio dipenda dalle equazioni (1), (2), (3), (4), (5), (6) del §. LXXI, la proprietà della somma dei momenti $= 0$, o sia l'equazione $P'dp' + P''dp'' + \text{ec.} = 0$ è una proprietà necessaria, e indivisibile dall'equilibrio. E' notabile che il movimento, che si dà al sistema per ottenere l'equazione suddetta, in molti casi, come abbiam dimostrato, può essere finito, ed allora essa diventa l'equazione delle forze; ma generalmente parlando, bisogna che sia infinitesimo. E' vero altresì, che la maniera per la quale abbiam dimostrato l'equazione delle forze, e quella dei momenti, ci ha fatto vedere, che la necessità di supporre infinitesima la variazione di posto nel sistema, oltre al dipendere dalla naturá delle Velocità Virtuali, che non si contemplano nell'equazione delle forze, nasce da due accidentalità, che ho chiamato Geometriche, comechè dipendenti da figura, o situazione, e che tali due accidentalità appartengono soltanto al moto rotatorio, che posson prendere i corpi, o punti costituenti il sistema, in virtù del moto impressoli; e per conseguenza, qualora il moto impresso al sistema non sia che moto progressivo, l'equazione delle forze si verificherà generalmente finito, o infinitesimo che sia. il movimento. Se dunque sia dato un corpo di qualunque figura, a quanti si vogliano punti del quale sieno applicate delle forze qualunque, e per un punto preso a volontà nello spazio, conducansi tre assi normali; si concepisca il medesimo corpo situato in una posizione comunque distante dalla prima, ma tale, che ciascheduno dei punti ai quali sono applicate le forze, siasi egualmente scostato dalla prima sua situazione, e per esempio della quantità Δx nel senso delle x, della quantità Δy nel senso delle y, e della Δz nel senso delle z. Ciò posto le normali, che dai punti in questione nuovamente situati si caleranno sopra le direzioni delle respettive forze applicateli nella primiera posizione, intercetteranno delle porzioni delle dette direzioni; e queste porzioni saranno tali, che se le forze erano in equilibrio, moltiplicate respettivamente per le forze medesime, costituiranno una serie di prodotti $= 0$; proprietà dell'equilibrio assai singolare, che non resta alterata per una infinitesima rotazione, se si disprezzano le infinitesime $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ ec. rispetto alle $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$.

§. LXXXIV.

Resta pertanto dimostrato, che qualunque volta nei corpi rigidi, o sia nei sistemi a distanze invariabili vi sarà l'equilibrio tra quantunque forze applicatevi, l'equazione dei momenti avrà luogo necessariamente; ed è da rimarcarsi, che l'equazione dei momenti non si verifica separatamente nel senso di ciascheduno dei tre assi, perchè le equazioni (13), (14), e (15) non possono separarsi in guisa da mettere separatamente $= 0$, i termini affetti delle variazioni $\delta y' + \delta' y'$, $\delta y'' + \delta' y''$ ec., $\delta x' + \delta' x'$, $\delta x'' + \delta' x''$ ec., $\delta z' + \delta' z'$, $\delta z'' + \delta' z''$ ec.

§. LXXXV.

Si osservi all' incontro, che per quanto l' equazione dei momenti non si verifichi in tutte tre le direzioni dei tre assi separatamente presi, si verifica peraltro rispetto a tutti tre i piani intercetti dai tre assi medesimi. In fatti le forze parallele al piano delle x, y sono $P' \cos. \alpha'$, $P'' \cos. \alpha''$ ec., $P' \cos \beta'$, $P'' \cos. \beta''$ ec., e gli spazi in virtù dell' urto dato al sistema, descritti parallelamente a questo piano, possono essere $\Delta x' + \delta x'$, $\Delta x' + \delta x''$, $\Delta x' + \delta x'''$ ec., $\Delta y' + \delta y'$, $\Delta y' + \delta y''$, $\Delta y' + \delta y'''$ ec.; e si avverta, che io non metto tra questi nè $\delta' x'$, $\delta' x''$ ec., nè $\delta' y'$, $\delta' y''$ ec., perchè questi sono spazi paralleli è vero agli assi delle x, e delle y, ma descritti in virtù del moto che si suppone aver avuto il sistema intorno agli assi delle y, e delle x, come risulta dall' osservare le equazioni (14), e (15), e perciò non già paralleli, ma normali al piano in questione delle x, y. Ciò posto, sommando con l' equazione (13) le equazioni (7), e (8), avremo l' equazione

$$(18)\quad P' \cos. \alpha' (\Delta x' + \delta x') + P'' \cos. \alpha'' (\Delta x' + \delta x'') + P''' \cos. \alpha''' (\Delta x' + \delta x''') + \text{ec.}$$
$$+ P' \cos. \beta' (\Delta y' + \delta y') + P'' \cos. \beta'' (\Delta y' + \delta y'') + P''' \cos. \beta''' (\Delta y' + \delta y''') + \text{ec.} = 0,$$

che dunque sarà la somma delle forze parallele al piano delle x, y moltiplicate respettivamente per gli spazi descritti parallelamente al piano istesso dai vari punti del sistema, per il moto impressoli per ipotesi. E nell'istessa guisa per gli altri due piani delle x, z, e delle y, z, avremo le due equazioni

$$\begin{aligned}(19)\quad & P'\cos.\alpha'(\Delta x'+\delta' x')+P''\cos.\alpha''(\Delta x'+\delta' x'') \\ & +P'''\cos.\alpha'''(\Delta x'+\delta' x''')+\text{ec.} \\ & +P'\cos.\gamma'(\Delta z'+\delta z')+P''\cos.\gamma''(\Delta z'+\delta z'') \\ & +P'''\cos.\gamma'''(\Delta z'+\delta z''')+\text{ec.}=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(20)\quad & P'\cos.\beta'(\Delta y'+\delta' y')+P''\cos.\beta''(\Delta y'+\delta' y'') \\ & +P'''\cos.\beta'''(\Delta y'+\delta' y''')+\text{ec.} \\ & +P'\cos.\gamma'(\Delta z'+\delta' z')+P''\cos.\gamma''(\Delta z'+\delta' z'') \\ & +P'''\cos.\gamma'''(\Delta z'+\delta' z''')+\text{ec.}=0.\end{aligned}$$

§. LXXXVI.

Non è dunque possibile di negare, che qualunque volta abbia luogo l'equilibrio, esiste necessariamente l'equazione dei momenti; ma è egli sicuro, che qualunque volta esiste l'equazione dei momenti, abbia sempre luogo l'equilibrio? Il Signor La Grange ha fatto vedere, che dall'equazione generale dei momenti $P'dp'+P''dp''+\text{ec.}=0$ si deducevano costantemente le tre equazioni relative al moto progressivo, e le tre altre relative al moto rotatorio, onde l'equilibrio è conseguenza necessaria dell'equazione dei momenti. Egli ha dimostrato ciò medianti alcune ingegnose trasformazioni, che conducono a trovare le somme dei termini delle ricercate equazioni, moltiplicate per quantità indipendenti tra loro, e perciò necessariamente $=0$ da per se stesse, separatamente da tutto il resto dell'equazione dei momenti. Questo metodo rigorosissimo, che trovasi a pag. 26. e seguenti della Meccanica Analitica, lascia la curiosità d'indagare cosa contenga quel resto dell'equazione dei momenti, che avanza alle equazioni ricercate. Per esempio a pag. 27. si trova l'equazione dei momenti trasformata in questa

$$\begin{aligned} 0 = & (P\cos.\alpha + P'\cos.\alpha' + P''\cos.\alpha'' + \text{ec.})\,dx \\ & + (P\cos.\beta + P'\cos.\beta' + P''\cos.\beta'' + \text{ec.})\,dy \\ & + (P\cos.\gamma + P'\cos.\gamma' + P''\cos.\gamma'' + \text{ec.})\,dz \\ & + P'(\cos.\alpha'\,d\xi + \cos.\beta'\,d\eta + \cos.\gamma'\,d\zeta) \\ & + P''(\cos.\alpha'\,d\xi' + \cos.\beta''\,d\eta' + \cos.\gamma''\,d\zeta') \\ & \qquad \text{ec.} \end{aligned}$$

dalla quale tolti i termini affetti delle quantità arbitrarie, ed independenti dx, dy, dz, resta una serie di termini costituenti un'equazione della forma della prima equazione dei momenti, e che non comparisce subito cosa significhi.

§. LXXXVII.

Prendo l'equazione (17) da me sopra trovata, che è l'equazione dei momenti analizzata in tutti i suoi elementi, e da essa si manifesta a dirittura, che poste = o separatamente le somme dei termini affetti delle quantità arbitrarie $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$, restano tanti termini, che costituiscono l'equazione (16), che è la somma delle tre equazioni (13), (14), e (15) relative ai moti rotatori; ma siccome questa sola considerazione non finisce d'acquietare, faremo con rigore toccar con mano, che il residuo in questione contiene effettivamente, combinandolo con le condizioni del sistema, le altre equazioni necessarie per l'equilibrio, e nel caso attuale adunque somministra le tre equazioni necessarie, perchè sia impedita qualunque rotazione.

§. LXXXVIII.

Noi esporremo questa dimostrazione per tre punti, giacchè a colpo d'occhio vedrassi, che la medesima si applica ad un numero qualunque di punti. Nell'ipotesi adunque del sistema rigido, le tre quantità $\xi^2+\eta^2+\zeta^2$, $\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2$, $(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2+(\zeta'-\zeta)^2$, le quali esprimono i quadrati delle distanze tra i punti dati, devono esser costanti, e quindi i loro differenziali eguali a zero. Avremo pertanto l'equazioni

$$(A)\quad \begin{aligned} &\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta = 0 \\ &\xi' d\xi' + \eta' d\eta' + \zeta' d\zeta' = 0 \\ &\xi' d\xi + \xi d\xi' + \eta' d\eta + \eta d\eta' + \zeta' d\zeta + \zeta d\zeta' = 0, \end{aligned}$$

e per mezzo di esse potremo dalla equazione

$$(B)\quad \begin{aligned} &P'(\cos \alpha' d\xi + \cos. \beta' d\eta + \cos. \gamma' d\zeta) \\ &+ P''(\cos. \alpha'' d\xi' + \cos. \beta'' d\eta' + \cos. \gamma'' d\zeta') = 0 \end{aligned}$$

eliminare tre delle sei quantità ξ, η, ζ ec., e le altre tre rimanendo allora indeterminate, i loro coefficienti posti $=0$, ci daranno le tre equazioni necessarie per l'equilibrio.

§. LXXXIX.

Per eseguir comodamente questa eliminazione, si aggiungano all'equazione (B) le tre equazioni (A), moltiplicate respettivamente per m, n, p, ed avrassi

$$\left.\begin{aligned} &(P' \cos. \alpha' + m\xi + p\xi') d\xi \\ &+ (P' \cos. \beta' + m\eta + p\eta') d\eta \\ &+ (P' \cos. \gamma' + m\zeta + p\zeta') d\zeta \\ &+ (P'' \cos. \alpha'' + n\xi' + p\xi) d\xi' \\ &+ (P'' \cos \beta'' + n\eta' + p\eta) d\eta' \\ &+ (P'' \cos. \gamma'' + n\zeta' + p\zeta) d\zeta' \end{aligned}\right\} = 0$$

Ora posti $=0$ i coefficienti di tre qualunque delle variazioni $d\xi$, ec. si determineranno da ciò i valori di m, n, p, e questi sostituiti negli altri coefficienti ci daranno le ricercate equazioni. Oppure, ciò che è lo stesso, formeremo l'equazioni

$$(a) \quad P' \cos.\alpha' + m\xi + p\xi' = 0$$
$$(b) \quad P' \cos.\beta' + m\eta + p\eta' = 0$$
$$(c) \quad P' \cos.\gamma' + m\zeta + p\zeta' = 0$$
$$(d) \quad P'' \cos.\alpha'' + n\xi' + p\xi = 0$$
$$(e) \quad P'' \cos.\beta'' + n\eta' + p\eta = 0$$
$$(f) \quad P'' \cos.\gamma'' + n\zeta' + p\zeta = 0$$

e poi elimineremo le quantità m, n, p.

§. XC.

Primieramente mediante la combinazione

$$(a)\eta - (b)\xi + (c)\eta' - (e)\xi' = 0$$

otterremo l'equazione

$$P'\eta \cos.\alpha' - P'\xi \cos.\beta' + P''\eta' \cos.\alpha'' - P''\xi' \cos.\beta'' = 0,$$

ove non si trovano più le lettere m, n, p. Ora, se si osserva che il Signor La Grange ha supposto $\xi = x' - x$, $\xi' = x'' - x$, $\eta = y' - y$, $\eta' = y'' - y$, quella equazione diventa

$$P'(y' - y)\cos.\alpha' - P'(x' - x)\cos.\beta'$$
$$+ P''(y'' - y)\cos.\alpha'' - P''(x'' - x)\cos.\beta'' = 0,$$

e poichè

$$-P'\cos.\alpha'-P''\cos.\alpha''=P\cos.\alpha\,,$$
$$-P'\cos.\beta'-P''\cos.\beta''=P\cos.\beta\,,$$

avremo

$$P y\cos.\alpha-P x\cos.\beta+P'y'\cos.\alpha'$$
$$-P'x'\cos.\beta'+P''y''\cos.\alpha''-P''x''\cos.\beta''=0$$

la quale è in tutto simile all' equazione (4). Così pure mediante le combinazioni

$$(a)\,\zeta-(c)\,\xi+(d)\,\zeta'-(f)\,\xi'=0$$
$$(b)\,\zeta-(c)\,\eta+(e)\,\zeta'-(f)\,\eta'=0$$

avremo l' equazioni

$$P'\zeta\cos.\alpha'-P'\xi\cos.\gamma'+P''\zeta'\cos.\alpha''-P''\xi'\cos.\gamma''=0$$
$$P'\zeta\cos.\beta'-P'\eta\cos.\gamma'+P''\zeta'\cos.\beta''-P''\eta'\cos.\gamma''=0$$

le quali come sopra si proverà esser le medesime che le nostre equazioni (5) e (6), che adunque non meno che l' equazione (4) saranno contenute nel residuo in questione della trasformata del Signor La Grange, ed ogni dubbiezza vien quindi a dileguarsi intieramente.

§. XCI.

Ma giova il vedere come per mezzo dell' equazione (17) da me ritrovata, se suppongasi data la generale equazione dei momenti, si concepisca direttamente la sussistenza delle sei equazioni dell'equilibrio. Per quello che abbiamo veduto, data l'equazione generale dei momenti $P' d p' + P'' d p'' + $ ec. $= 0$, avremo per mezzo dell' equazione (17)

$$d p' = \cos.\alpha' (\Delta x' + \delta x' + \delta' x') +$$
$$\cos.\beta' (\Delta y' + \delta y' + \delta' y') + \cos.\gamma' (\Delta z' + \delta z' + \delta' z')$$
$$d p'' = \cos.\alpha'' (\Delta x' + \delta x'' + \delta' x'') +$$
$$\cos.\beta'' (\Delta y' + \delta y'' + \delta' y'') + \cos.\gamma'' (\Delta z' + \delta z'' + \delta' z'')$$
$$d p''' = \cos.\alpha''' (\Delta x' + \delta x''' + \delta' x''') +$$
$$\cos.\beta''' (\Delta y' + \delta y''' + \delta' y''') + \cos.\gamma''' (\Delta z' + \delta z''' + \delta' z''')$$

ec.

§. XCII.

Ora se qualunque sia il moto dato al sistema l'equazione $P' d p' + P'' d p'' + $ ec. $= 0$ ha sempre luogo, avrà luogo ancòra quando il moto, che può prendere il sistema è determinato da certe leggi, di maniera che i punti di esso percorrano certi spazi, e non altri. Ciò posto si concepisca, che il sistema in cui generalmente si verifica l'equazione dei momenti $P' d p' + P'' d p'' + $ ec. $= 0$ per uno degli infiniti diversi impulsi, che possono darseli, prenda un movimento tale, per cui nel primo istante tutti i punti progrediscano solamente nel senso delle x della eguale quantità $\Delta x'$; è chiaro, che qualunque sieno le direzioni delle forze applicate a questi punti, il viaggio, che avrà fatto ciaschedun punto nel senso della direzione della respettiva forza, sarà uguale a $\Delta x'$, moltiplicato per il coseno dell'angolo, che la direzione della data forza fa con l'asse delle x, e così avremo $dp' = \Delta x' \cos.\alpha'$, $dp'' = \Delta x' \cos.\alpha''$, $dp''' = \Delta x' \cos.\alpha'''$ ec.; e così l'equazione dei momenti diventerà $(P' \cos.\alpha' + P'' \cos.\alpha'' + P''' \cos.\alpha''' +$ ec.$)\Delta x' = 0$; e nell'istessa guisa prendendo il sistema un moto tale, che tutti i punti di esso progrediscano solamente nel senso delle y della comune quantità $\Delta y'$, l'equazione dei momenti $P'dp' + P''dp'' +$ ec. $= 0$ si cangerà in questa $(P' \cos.\beta' + P'' \cos.\beta'' + P''' \cos.\beta''' +$ ec.$)\Delta y' = 0$; e fatto l'istesso discorso rispetto alle z, la medesima equazione dei momenti si cangerà in questa $(P' \cos.\gamma' + P'' \cos.\gamma'' + P''' \cos.\gamma''' +$ ec.$)\Delta z' = 0$, e queste tre trasformate divise respettivamente per $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$ somministrano le tre equazioni del moto progressivo.

§. XCIII.

E più generalmente osservando, che i differenziali delle p', p'', p''' ec. sono composti dei differenziali delle tre coordinate, e ciascheduna di queste ha tre diverse caratteristiche, cioè Δ, δ, δ', io secondo la conosciuta maniera di notare le differenze parziali, esprimerò i diversi spazietti, che supporrò aver descritto i vari corpi, per dp', dp'' ec. divisi respettivamente per il differenziale di quelle coordinate nel senso delle quali avrò supposto che siensi mossi i vari punti per il moto impresso al sistema. Per esempio $\left(\frac{dp'}{\Delta x}\right)$, $\left(\frac{dp''}{\Delta x}\right)$, $\left(\frac{dp'''}{\Delta x}\right)$ ec., significherà che il sistema abbia avuto un moto soltanto progressivo, comune a tutti i punti nel senso delle x; nella stessa guisa $\left(\frac{dp'}{\delta x'}\right)+\left(\frac{dp'}{\delta y'}\right)$, $\left(\frac{dp''}{\delta x''}\right)+\left(\frac{dp''}{\delta y''}\right)$ ec., esprimerà, che il sistema ha ricevuto un tal moto, per cui tutti i punti si sono mossi solamente intorno all'asse delle z; e quì è da notare, che queste caratteristiche δ, δ' non possono essere mai una sola, mentre appellando al moto di rotazione, questo inevitabilmente produce un movimento contemporaneo nel senso dei due assi normali a quello, intorno al quale segue la rotazione; così finalmente $\left(\frac{dp'}{\delta' x'}\right)$ $+\left(\frac{dp'}{\delta z'}\right)$, $\left(\frac{dp''}{\delta' x''}\right)+\left(\frac{dp''}{\delta z''}\right)$ ec., esprime, che il sistema ha avuto un tal moto, per cui ogni punto ha ruotato intorno all'asse delle y, e così del resto.

§. XCIV.

Posto ciò, dato che in un sistema abbia luogo l'equazione dei momenti $P'dp'+P''dp''+P'''dp'''+\text{ec.}=0$, nella quale dp', dp'' ec. rappresentano degli spazi comunque descritti dai vari punti; è chiaro che quella equazione avrà luogo ancòra quando in vece delle generiche espressioni dp', dp'' ec., vi saranno esplicitamente quelli speciali spazi, che ciaschedun punto del sistema, per il moto impressoli, potrà aver percorso. In conseguenza avranno luogo ancòra le sei equazioni

$$P'\frac{dp'}{\Delta x'}\Delta x'+P''\frac{dp''}{\Delta x'}\Delta x'+P'''\frac{dp'''}{\Delta x'}\Delta x'+\text{ec.}=0$$

$$P'\frac{dp'}{\Delta y'}\Delta y'+P''\frac{dp''}{\Delta y'}\Delta y'+P'''\frac{dp'''}{\Delta y'}\Delta y'+\text{ec.}=0$$

$$P'\frac{dp'}{\Delta z'}\Delta z'+P''\frac{dp''}{\Delta z'}\Delta z'+P'''\frac{dp'''}{\Delta z'}\Delta z'+\text{ec.}=0$$

$$P'\left(\frac{dp'}{\delta x'}\delta x'+\frac{dp'}{\delta y'}\delta y'\right)+P''\left(\frac{dp''}{\delta x''}\delta x''+\frac{dp''}{\delta y''}\delta y''\right)$$
$$+P'''\left(\frac{dp'''}{\delta x'''}\delta x'''+\frac{dp'''}{\delta y'''}\delta y'''\right)+\text{ec.}=0$$

$$P'\left(\frac{dp'}{\delta' x'}\delta' x'+\frac{dp'}{\delta z'}\delta z'\right)+P''\left(\frac{dp''}{\delta' x''}\delta' x''+\frac{dp''}{\delta z''}\delta z''\right)$$
$$+P'''\left(\frac{dp'''}{\delta' x'''}\delta' x'''+\frac{dp'''}{\delta z'''}\delta z'''\right)+\text{ec.}=0$$

$$P'\left(\frac{dp'}{\delta' y'}\delta' y'+\frac{dp'}{\delta' z'}\delta' z'\right)+P''\left(\frac{dp''}{\delta' y''}\delta' y''+\frac{dp''}{\delta' z''}\delta' z''\right)$$

$$+P'''\left(\frac{dp'''}{\delta' y'''}\delta' y'''+\frac{dp'''}{\delta' z'''}\delta' z'''\right)+\text{ec.}=0$$

le quali equazioni sono a differenze parziali, e le prime tre possono essere a differenze parziali e finite; e riprendendo sotto gli occhi i valori di dp', dp'', dp''' ec., trovati per mezzo dell'equazione (17), e notati al §. XCI., si troveranno essere le sei equazioni dell'equilibrio.

§. XCV.

In fatti dai precitati valori si ottiene

$$\frac{dp'}{\Delta x'}\Delta x'=\cos.\alpha'\Delta x'$$

$$\frac{dp''}{\Delta x'}\Delta x'=\cos.\alpha''\Delta x'$$

ec.

$$\frac{dp'}{\Delta y'}\Delta y'=\cos.\beta'\Delta y'$$

$$\frac{dp''}{\Delta y'}\Delta y'=\cos.\beta''\Delta y'$$

ec.

$$\frac{dp'}{\Delta z'}\Delta z'=\cos.\gamma'\Delta z'$$

$$\frac{dp''}{\Delta z'}\Delta z'=\cos.\gamma''\Delta z'$$

ec.

$$\frac{dp'}{\delta x'}\delta x'+\frac{dp'}{\delta y'}\delta y'=\cos.\alpha'\delta x'+\cos.\beta'\delta y'$$

$$\frac{dp''}{\delta x''}\delta x''+\frac{dp''}{\delta y''}\delta y''=\cos.\alpha''\delta x''+\cos.\beta''\delta y''$$

ec.

$$\frac{dp'}{\delta' x'}\delta' x'+\frac{dp'}{\delta z'}\delta z'=\cos.\alpha'\delta' x'+\cos.\gamma'\delta z'$$

$$\frac{dp''}{\delta' x''}\delta' x''+\frac{dp''}{\delta z''}\delta z''=\cos.\alpha''\delta' x''+\cos.\gamma''\delta z''$$

ec.

$$\frac{dp'}{\delta' y'}\delta' y'+\frac{dp'}{\delta' z'}\delta' z'=\cos.\beta'\delta' y'+\cos.\gamma'\delta' z'$$

$$\frac{dp''}{\delta' y''}\delta' y''+\frac{dp''}{\delta' z''}\delta' z''=\cos.\beta''\delta' y''+\cos.\gamma''\delta' z''$$

ec.

onde fatte le debite sostituzioni si ritrovano le equazioni (1), (2), (3), (4), (5), (6), che dunque verranno ad esser dedotte dall' equazione dei momenti, della quale si trovano esse in tal guisa, essere dei casi particolari.

§. XCVI.

Potrebbe dubitarsi se oltre a queste sei equazioni particolari dedotte dall' equazione dei momenti, se ne potessero dare altre; onde per esaurire questa ricerca, suppongasi, che oltre ai sei vari movimenti dati al sistema per ottenere le sei equazioni parziali sopraccitate, si dia al sistema un altro moto progressivo, per cui ciaschedun punto di esso progredisca della quantità m, con una direzione, che faccia con le varie forze applicate ai vari punti, gli angoli n', n'', n''' ec. Ciò posto, gli spazi descritti nel senso delle forze medesime, saranno $m\cos.n'$, $m\cos.n''$, $m\cos.n'''$ ec., ed avremo l'equazione delle forze, o dei momenti, espressa come segue

$$m(P'\cos.n' + P''\cos.n'' + P'''\cos.n''' + \text{ec.}) = 0.$$

Per accertarsi se questa equazione contenga alcuna condizione di più delle tre equazioni (1), (2), (3), o sia superflua, perchè implicata nelle medesime, si supponga che la m faccia con gli assi delle x, y, z gli angoli a, b, c; dunque quando i corpi hanno progredito della quantità m, avranno nel senso dei tre assi progredito delle quantità $m\cos.a$, $m\cos.b$, $m\cos.c$, e sarà per conseguenza $m\cos.a = \Delta x'$, $m\cos.b = \Delta y'$, $m\cos.c = \Delta z'$; e siccome le forze fanno con i tre assi gli angoli α', α'', α''' ec., β', β'', β''' ec., γ', γ'', γ''' ec, avremo per le solite formole

$$m\cos.n' = dp' = \cos.\alpha'\Delta x' + \cos.\beta''\Delta y' + \cos.\gamma'\Delta z'$$
$$m\cos.n'' = dp'' = \cos.\alpha''\Delta x' + \cos.\beta''\Delta y' + \cos.\gamma''\Delta z'$$
$$m\cos.n''' = dp''' = \cos.\alpha'''\Delta x' + \cos.\beta'''\Delta y' + \cos.\gamma'''\Delta z'$$

ec.

§. XCVII.

Quindi sostituendo i valori delle $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$ trovati sopra, l' equazione delle forze, o dei momenti, che nel §. precedente aveva la forma

$$m\,(P' \cos. n' + P'' \cos. n'' + \text{ec.}) = 0$$

potrà presentarsi sotto quest' altra

$$\begin{aligned} 0 = {} & mP'\,(\cos. a \cos. \alpha' + \cos. b \cos. \beta' + \cos. c \cos. \gamma') \\ & + mP''\,(\cos. a \cos. \alpha'' + \cos. b \cos. \beta'' + \cos. c \cos. \gamma'') \\ & + mP'''(\cos. a \cos. \alpha''' + \cos. b \cos. \beta''' + \cos. c \cos. \gamma''') \\ & + \text{ec.} \end{aligned}$$

e per conseguenza comparire, come in fatti essa lo è, non altro che la somma delle tre equazioni (1), (2), (3) moltiplicate respettivamente per $m \cos. a$, $m \cos. b$, $m \cos. c$, e perciò incapace di somministrare una condizione ulteriore.

§. XCVIII.

Che se si credesse di potere ottenere oltre le sei equazioni generali, un' altra equazione, nata dal dare al sistema un impulso, per cui esso potesse prendere non un moto progressivo, come nel precedente caso, ma rotatorio intorno ad un asse comunque situato rispetto ai tre primi ; ancor questa equazione si dimostrerebbe compresa nelle tre già ottenute per il moto rotatorio, e perciò non si avrebbe alcuna condizione di nuovo; mentre seguendo la dimostrazione data dal Signor La Grange a pag. 31. e seguenti della sua Meccanica, si rileva, che qualunque infinitesima rotazione prenda il sistema, è sempre composta di tre rotazioni infinitesime intorno a tre assi normali tra loro.

PARTE SECONDA

Dei sistemi a distanze comunque variabili.

§. I.

UN sistema di punti, o corpi in equilibrio, ed agitati da qualunque forze, con la condizione, che dandoli un indeterminato impulso, possano i punti prendere dei moti parimente indeterminati, senza osservare veruna nota legge nel variare le respettive distanze tra loro, un tal sistema, dico, comprende anco un fluido in equilibrio, in cui si supponga ogni punto animato da qualunque forze, senza impegnare alla considerazione della figura delle molecole componenti. E si vede che verificandosi in un tal sistema l'equazione dei momenti, tutto ciò che si è dimostrato nella Prima Parte, verrà ad essere un caso particolare della generale Teoria, che mi accingo a sviluppare in questa seconda.

§. II.

Per generalizzare l'invenzione dell'equazione dei momenti, riprendo la considerazione di essa in un sistema rigido, o sia a distanze invariabili sotto un altro aspetto, e per procedere con chiarezza, riduco il caso contemplato nella Prima Parte al §. LII., a soli tre corpi situati nel piano delle x, y, ed agitati da forze parallele al piano stesso, ed avremo necessariamente le equazioni (1), (2), (3) del paragrafo sopraccitato.

§. III.

Queste tre equazioni contengono le condizioni dell'equilibrio, purchè si presupponga, che dando un moto comunque al sistema dei tre corpi, questi si muovano, senza però cangiare le respettive distanze fra loro, che è quanto dire, essi sieno tre punti di un solido inflessibile. Dipenderà dalla maniera di esprimere analiticamente questa supposizione, il ritrovamento della equazione dei momenti.

§. IV.

E' chiaro che le due prime equazioni (1), e (2), essendo relative al moto progressivo comune a tutti i corpi, questo moto progressivo non altererà le respettive loro distanze, e perciò la supposizione sopra indicata, che si tratta di esprimere analiticamente, si referirà sempre soltanto al moto rotatorio.

§. V.

La condizione delle invariabili distanze ci somministrò fino ad ora le proporzionalità tra le y', y'' ec., $\delta x'$, $\delta x''$ ec.; e le x', x'' ec., $\delta y'$, $\delta y''$ ec.; ma queste proporzionalità non sono in effetto che altrettante equazioni, che per tre corpi si presenteranno così:

$$y'\delta x'' - y''\delta x' = 0$$
$$y'\delta x''' - y'''\delta x' = 0$$
$$y''\delta x''' - y'''\delta x'' = 0$$
$$x'\delta y'' - x''\delta y' = 0$$
$$x'\delta y''' - x'''\delta y' = 0$$
$$x''\delta y''' - x'''\delta y'' = 0$$

e formeranno sei equazioni, che si ridurranno a quattro, considerando, che la terza, e la sesta nascono necessariamente dalle due respettivamente precedenti.

§. VI.

Ma l'invariabilità delle distanze somministra ancòra queste tre equazioni

$$x'\,\delta x' + y'\,\delta y' = 0$$
$$x''\,\delta x'' + y''\,\delta y'' = 0$$
$$x'''\delta x''' + y'''\delta y''' = 0$$

di una delle quali ci siamo serviti al §. LVI., ed altrove per trasformare l'equazioni del moto rotatorio. Avremo dunque le seguenti sette equazioni;

$$x'\,\delta x' + y'\delta y' = 0$$
$$x''\,\delta x'' + y''\,\delta y'' = 0$$
$$x'''\delta x''' + y'''\delta y''' = 0$$
$$y'\,\delta x'' - y''\,\delta x' = 0$$
$$y'\,\delta x''' - y'''\,\delta x' = 0$$
$$x'\,\delta y'' - x''\,\delta y' = 0$$
$$x'\,\delta y''' - x'''\,\delta y' = 0;$$

ora si avverta che ancòra quì se ve ne sieno alcune, le quali si contengano nelle altre, bisogna rigettarle per ora come superflue, e ristringere il numero delle equazioni quanto è possibile.

§. VII.

A tale oggetto prendo dalla prima equazione il valore di $\delta x'$, e dalla seconda il valore di $\delta x''$, e trovo

$$\delta x' = -\frac{y'\delta y'}{x'}$$
$$\delta x'' = -\frac{y''\delta y''}{x''}$$

sostituisco tali valori nella equazione quarta, e questa diventerà

$$x'\delta y''-x''\delta y'=0$$

che è la sesta delle equazioni proposte. Similmente prendendo dalle equazioni prima, e terza

$$\delta x'=-\frac{y'\delta y'}{x'}$$

$$\delta x'''=-\frac{y'''\delta y'''}{x'''}$$

e sostituendo tali valori nella quinta, questa diventerà $x'\delta y'''-x'''\delta y'=0$, che è la settima delle proposte. Quindi le due ultime equazioni possono omettersi, come contenute nelle altre cinque, e nella stessa maniera si potrebbero omettere la quarta, e la quinta, purchè con le tre prime si ritenessero la sesta, e la settima, come si vedrà sostituendo nella sesta e settima i valori

$$\delta y'=-\frac{x'\delta x'}{y'}$$

$$\delta y''=-\frac{x''\delta x''}{y''}$$

$$\delta y'''=-\frac{x'''\delta x'''}{y'''}$$

per la qual sostituzione esse si cangeranno nella quarta, e nella quinta.

§. VIII.

Si possono adunque assumere cinque sole equazioni per rappresentare l'invariabilità delle distanze tra i tre punti proposti, e di ciascheduno di essi dal centro delli assi, che si suppone il centro della rotazione. In termini finiti parimente le equazioni saranno cinque, ed anco integrando le quattro ultime del §. VI. in modo, da non riguardare per variabili, che le sole quantità, che in ciascheduna si trovano differenziate, si ottiene

$$y'x''-y''x'=a$$
$$y'x'''-y'''x'=a'$$
$$x'y''-x''y'=a''$$
$$x'y'''-x'''y'=a'''$$

dal che ricavando $a=-a''$, ed $a'=-a'''$, potrebbe apparire, che le due prime equazioni non contenessero alcuna condizione di più che le due ultime, e che possano indifferentemente pertanto prendersi o l'une, o l'altre.

§. IX.

Ma per tor di mezzo ogni equivoco di questa specie di integrazione a differenze parziali, si possono le sette proposte equazioni ridurre a cinque in termini finiti, come appresso. Si sottragga l'equazione sesta dalla quarta, e la settima dalla quinta, ed avremo le sette equazioni ridotte alle cinque seguenti

$$x'\delta x' + y'\delta y' = 0$$
$$x''\delta x'' + y''\delta y'' = 0$$
$$x'''\delta x''' + y'''\delta y''' = 0$$
$$y'\delta x'' + x''\delta y' - y''\delta x' - x'\delta y'' = 0$$
$$y'\delta x''' + x'''\delta y' - y'''\delta x' - x'\delta y''' = 0$$

onde integrando saranno le condizioni della invariabilità delle distanze espresse dalle equazioni seguenti in termini finiti

$$x'^2 + y'^2 = a'$$
$$x''^2 + y''^2 = a''$$
$$x'''^2 + y'''^2 = a'''$$
$$y'x'' - y''x' = a''''$$
$$y'x''' - y'''x' = a^{v}$$

le quali come sopra abbiam potuto rilevare per ridurle a differenziali, servirà differenziare all' ordinario le prime tre, e le due ultime, per rapporto soltanto alle x solamente, o solamente alle y, accidentalità assai singolare, e che dà luogo ad alcune considerazioni rilevanti, su i Problemi dipendenti dalle equazioni a differenze parziali.

§. X.

Frattanto gioverà il confermare, che queste cinque equazioni, oltre al rappresentare la invariabile distanza tra ciaschedun punto, e il centro della rotazione, esprimono ancòra l'invariabilità delle distanze tra i tre corpi, dimostrando come per mezzo di esse si ricavino le formole delle distanze medesime, che il Signor La Grange ha posto eguali ad una costante, per rappresentare tal condizione. Nel caso presente di tre corpi situati nel medesimo piano le loro respettive distanze saranno espresse dalle seguenti formole

$$\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2}$$
$$\sqrt{(x'''-x')^2+(y'''-y')^2}$$
$$\sqrt{(x'''-x'')^2+(y'''-y'')^2}$$

ciascheduna delle quali dovrà essere eguale ad una costante, per rappresentare l'invariabilità delle distanze, e perciò essere $=0$ il respettivo differenziale, dal che adunque nascono

$$(1)\quad (y''-y')(\delta y''-\delta y')+(x''-x')(\delta x''-\delta x')=0$$
$$(2)\quad (y'''-y')(\delta y'''-\delta y')+(x'''-x')(\delta x'''-\delta x')=0$$
$$(3)\quad (y'''-y'')(\delta y'''-\delta y'')+(x'''-x'')(\delta x'''-\delta x'')=0$$

espressioni, che si sono differenziate con la caratteristica δ, perchè si referiscono soltanto al moto rotatorio nel caso nostro, lo che non produce variazione nella forma usata dal Signor La Grange, ed alle quali bisogna mostrare come si riducano le nostre cinque equazioni.

§. XI.

Differenziando le dette cinque equazioni, prendendo i differenziali delle ultime due soltanto per rapporto alle x, avremo

$$x'\delta x'+y'\delta y'=0$$
$$x''\delta x''+y''\delta y''=0$$
$$x'''\delta x'''+y'''\delta y'''=0$$
$$y'\delta x''-y''\delta x'=0$$
$$y'\delta x'''-y'''\delta x'=0,$$

sommando la prima con la seconda, avremo

$$x''\delta x''+x'\delta x'+y''\delta y''+y'\delta y'=0,$$

e questa potrà mettersi sotto la forma

$$(x''-x')(\delta x''-\delta x')+(y''-y')(\delta y''-\delta y')+$$
$$x''\delta x'+x'\delta x''+y''\delta y'+y'\delta y''=0;$$

ora si avverta, che prendendo dalla quarta equazione il valore di $y'=\frac{y''\delta x'}{\delta x''}$, e sostituendolo nella equazione prima, questa diventa

$$x'\delta x''+y''\delta y'=0,$$

e prendendo dalla medesima equazione quarta il valore di $y''=\frac{y'\delta x''}{\delta x'}$, e sostituendolo nella seconda equazione, questa diventa

$$x''\delta x'+y'\delta y''=0;$$

ma la somma di queste due trasformate è

$$x''\delta x'+x'\delta x''+y''\delta y'+y'\delta y'',$$

ed essendo per se stessa $=0$, resterà la somma delle due prime equazioni in virtù della equazione quarta, precisamente eguale alla quantità

$$(x''-x')(\delta x''-\delta x')+(y''-y')(\delta y''-\delta y')=0,$$

che è la formola (1), esprimente, secondo il metodo del Signor La Grange, la distanza costante tra il primo corpo e il secondo.

§. XII.

In simil guisa sommando l' equazione prima con la terza, avremo

$$x'''\delta x'''+x'\delta x'+y'''\delta y'''+y'\delta y'=0,$$

e posta questa somma sotto la forma

$$(x'''-x')(\delta x'''-\delta x')+(y'''-y')(\delta y'''-\delta y')+$$
$$x'''\delta x'+x'\delta x'''+y'''\delta y'+y'\delta y'''=0;$$

ma prendendo dalla quinta equazione i valori

$$y' = \frac{y''' \delta x'}{\delta x'''}$$

$$y''' = \frac{y' \delta x'''}{\delta x'}$$

e sostituendoli respettivamente nella prima, e nella terza, esse si trasformeranno in queste due

$$x' \delta x''' + y''' \delta y' = 0$$

$$x''' \delta x' + y' \delta y''' = 0,$$

che sommate insieme, danno

$$x''' \delta x' + x' \delta x''' + y''' \delta y' + y' \delta y''' = 0,$$

e mostrano, che la somma delle equazioni prima e terza combinata con l'equazione quinta, si riduce alla formola (2), esprimente la distanza costante tra il primo corpo ed il terzo.

§. XIII.

Finalmente sommando insieme le equazioni seconda, e terza, avremo

$$x''' \delta x''' + x'' \delta x'' + y''' \delta y''' + y'' \delta y'' = 0,$$

e questa potrà mettersi sotto la forma

$$(x''' - x'')(\delta x''' - \delta x'') + (y''' - y'')(\delta y''' - \delta y'') +$$
$$x''' \delta x'' + x'' \delta x''' + y''' \delta y'' + y'' \delta y''' = 0,$$

la quale si riduce alla formola (3) del Signor La Grange, esprimente la distanza costante tra il secondo, e il terzo corpo, subito che si provi, che

$$x'''\delta x''+x''\delta x'''+y'''\delta y''+y''\delta y'''=0.$$

A tale oggetto prendo dalle equazioni quarta, e quinta i valori di y', i quali dovendo essere eguali tra loro mi somministrano l'equazione

$$y''\delta x'''-y'''\delta x''=0;$$

prendo da questa equazione i valori

$$y''=\frac{y'''\delta x''}{\delta x'''}$$

$$y'''=\frac{y''\delta x'''}{\delta x''}$$

e gli sostituisco nelle equazioni seconda, e terza, ottenendone le due equazioni

$$x''\delta x'''+y'''\delta y''=0$$
$$x'''\delta x''+y''\delta y'''=0$$

la somma delle quali costituisce appunto la quantità

$$x'''\delta x''+x''\delta x'''+y'''\delta y''+y''\delta y'''=0,$$

come dee essere, perchè si verifichi la proposizione annunziata di sopra.

§. XIV.

Ma siccome nel passare dai termini finiti ai differenziali potrebbe nascere qualche dubbio, si vedrà facilmente, che le cinque equazioni finite del §. IX. esprimono effettivamente le formole finite delle distanze tra i dati punti, o corpi eguagliate ad una costante; e ciò nel modo seguente. Poste le equazioni

$$(1)\quad x'^2+y'^2=a'$$

$$(2)\quad x''^2+y''^2=a''$$

$$(3)\quad x'''^2+y'''^2=a'''$$

$$(4)\quad y'x''-x'y''=a^{\text{IV}}$$

$$(5)\quad y'x'''-x'y'''=a^{\text{V}}$$

sarà moltiplicando la (1) per la (2)

$$x'^2x''^2+x'^2y''^2+y'^2x''^2+y'^2y''^2=a'a''$$

e quadrando l'equazione (4), avremo

$$y'^2x''^2+y''^2x'^2=a^{\text{IV}}-2y'y''x'x''$$

dunque sarà

$$x'^2x''^2+2x'x''y'y''+y'^2y''^2=a'a''-\overline{a^{\text{IV}}}^2$$

e quindi otterremo un'altra equazione

$$(6)\quad x'x''+y'y''=b.$$

§. XV.

In simil guisa, profittando ancòra dell'equazione (5), si troveranno due altre equazioni, le quali facilmente troveremo essere dell'appresso forma,

$$(7)\quad x'x'''+y'y'''=b'$$

$$(8)\quad x''x'''+y''y'''=b'',$$

e quindi per mezzo delle seguenti tre combinazioni

$$(1)+(2)-2(6)$$

$$(1)+(3)-2(7)$$

$$(2)+(3)-2(8),$$

avremo

$$(x''-x')^2+(y''-y')^2=c$$

$$(x'''-x')^2+(y'''-y')^2=c'$$

$$(x'''-x'')^2+(y'''-y'')^2=c'',$$

cioè le distanze tra i tre corpi eguali ciascheduna ad una quantità costante, subito che siano costanti le quantità a', a'' ec.

§. XVI.

Resta dunque fissato, che cinque equazioni esprimono l'invariabilità delle distanze, e che queste possono essere come segue

$$x'\delta x' + y'\delta y' = 0$$
$$x''\delta x'' + y''\delta y'' = 0$$
$$x'''\delta x''' + y'''\delta y''' = 0$$
$$y'\delta x'' - y''\delta x' = 0$$
$$y'\delta x''' - y'''\delta x' = 0,$$

ovvero le cinque equazioni possono essere

$$x'\delta x' + y'\delta y' = 0$$
$$x''\delta x'' + y''\delta y'' = 0$$
$$x'''\delta x''' + y'''\delta y''' = 0$$
$$x'\delta y'' - x''\delta y' = 0$$
$$x'\delta y''' - x'''\delta y' = 0,$$

le quali nascono dalle cinque precedenti. Ovvero ancòra possono essere le cinque equazioni, come segue

$$x'\delta x' + y'\delta y' = 0$$
$$x'\delta y'' - x''\delta y' = 0$$
$$x'\delta y''' - x'''\delta y' = 0$$
$$y'\delta x'' - y''\delta x' = 0$$
$$y'\delta x''' - y'''\delta x' = 0,$$

le quali parimente nascono dalle due quintine d' equazioni soprannotate, e solo resta da far vedere come da quest'ultima quintina possa nascere qualunque delle precedenti suddette.

§. XVII.

A tale oggetto si osservi, che dalle quattro ultime equazioni dell' ultima quintina si possono ottenere le equazioni seguenti

$$\frac{\delta y'}{x'} = \frac{\delta y''}{x''} = \frac{\delta y'''}{x'''}$$

$$\frac{\delta x'}{y'} = \frac{\delta x''}{y''} = \frac{\delta x'''}{y'''}$$

ma dalla prima abbiamo $\frac{\delta y'}{x'} = -\frac{\delta x'}{y'}$, onde sarà ancòra $\frac{\delta y''}{x''} = -\frac{\delta x''}{y''}$, $\frac{\delta y'''}{x'''} = -\frac{\delta x'''}{y'''}$, cioè

$$x''\delta x'' + y''\delta y'' = 0$$

$$x'''\delta x''' + y'''\delta y''' = 0\,;$$

onde qualunque delle due prime quintine si forma per mezzo di quest' ultima.

§. XVIII.

Qualsivoglia pertanto di queste tre diverse maniere di esprimere l' invariabilità delle distanze con cinque equazioni, conduce alle formule, con le quali il Sig. La Grange ha espresso l' invariabili distanze fra i tre corpi, con la differenza, che queste cinque rappresentano ancòra l' invariabili distanze dal centro di rotazione; dal che a dirittura si vede non essere indifferente il servirsi delle formole del Signor La Grange, o delle mie; ma oltre alle conseguenze che io potrò dedurne, è da notarsi, che con semplice artifizio di calcolo si passa dalle mie alle formole del Signor La Grange, là dove da quelle non si perverrebbe a queste senza qualche soccorso dipendente dalla analisi delle respettive situazioni; e si vede, che prescindendo dalla maggior lunghezza del calcolo, il procedere, e i resultati sono sempre gli stessi, qualunque sia il numero dei punti, o corpi costituenti il sistema.

§. XIX.

Continuando adesso la soluzione del Problema, come annunziammo al §. II. avremo, nel supposto d' un sistema a distanze invariabili, per la soluzione le otto equazioni seguenti.

$$(1)\quad P'(y'\cos.\alpha'-x'\cos.\beta')+P''(y''\cos.\alpha''-x''\cos.\beta'') + P'''(y'''\cos.\alpha'''-x'''\cos.\beta''')=0$$

$$(2)\quad P'\cos.\alpha'+P''\cos.\alpha''+P'''\cos.\alpha'''=0$$

$$(3)\quad P'\cos.\beta'+P''\cos.\beta''+P'''\cos.\beta'''=0$$

$$(4)\quad x'\delta x'+y'\delta y'=0$$

$$(5)\ x'\delta y'' - x''\delta y' = 0$$

$$(6)\ x'\delta y''' - x'''\delta y' = 0$$

$$(7)\ y'\delta x'' - y''\delta x' = 0$$

$$(8)\ y'\delta x''' - y'''\delta x' = 0,$$

le prime tre delle quali sono appartenenti alle condizioni dell' equilibrio, e le cinque seguenti alla invariabilità tra le distanze.

§. XX.

In questo stato di cose si dia un movimento infinitesimo al sistema dei tre corpi, ed avvertendo a tutte le circostanze spiegate nella Prima Parte, prendansi dalle quattro ultime equazioni i valori

$$x'' = \frac{x'\delta y''}{\delta y'}$$

$$x''' = \frac{x'\delta y'''}{\delta y'}$$

$$y'' = \frac{y'\delta x''}{\delta x'}$$

$$y''' = \frac{y'\delta x'''}{\delta x'}$$

e ponendoli nella equazione (1) posta sotto la forma

$$P'x'\cos.\beta' + P''x''\cos.\beta'' + P'''x'''\cos.\beta''' -$$
$$P'y'\cos.\alpha' - P''y''\cos.\alpha'' - P'''y'''\cos.\alpha''' = 0$$

essa diventerà

$$\frac{x'}{\delta y'}\left(P'\delta y'\cos.\beta'+P''\delta y''\cos.\beta''+P'''\delta y'''\cos.\beta'''\right)$$
$$-\frac{y'}{\delta x'}\left(P'\delta x'\cos.\alpha'+P''dx''\cos.\alpha''+P'''dx'''\cos.\alpha'''\right)=0\,;$$

ma l'equazione (4) ci somministra $\frac{x'}{\delta y'}=-\frac{y'}{\delta x'}$, dunque sostituendo una quantità per l'altra, la nostra trasformata diventerà

$$(9)\quad P'\delta y'\cos.\beta'+P''\delta y''\cos.\beta''+P'''\delta y'''\cos.\beta'''$$
$$+P'\delta x'\cos.\alpha'+P''\delta x''\cos.\alpha''+P'''\delta x'''\cos.\alpha'''=0\,.$$

§. XXI.

Ora moltiplicando respettivamente le equazioni (2), e (3) per $\Delta x'$, e $\Delta y'$, e sommandole con l'equazione (9), e facendo

$$\Delta x'+\delta x'=dx'$$
$$\Delta x'+\delta x''=dx''$$
$$\Delta x'+\delta x'''=dx'''$$
$$\Delta y'+\delta y'=dy'$$
$$\Delta y'+\delta y''=dy''$$
$$\Delta y'+\delta y'''=dy'''$$

avremo

$$P'(dx'\cos.\alpha'+dy'\cos.\beta')+P''(dx''\cos.\alpha''+dy''\cos.\beta'')$$
$$+P'''(dx'''\cos.\alpha'''+dy'''\cos.\beta''')=0,$$

che per le cose dette si riduce a quella dei momenti, dedotta dal Principio delle Velocità Virtuali.

§. XXII.

Osservisi adesso, che nel caso attuale delle distanze invariabili, le cinque ultime equazioni del §. XIX. intanto esprimono l'invariabilità delle distanze, in quanto sono i loro respettivi integrali eguali ad una quantità costante; dunque quando i loro integrali saranno eguali ad una quantità variabile, non esprimeranno più quelle equazioni l'invariabilità delle distanze; dunque le distanze saranno variabili, e variabili secondo la natura della funzione, a cui saranno eguali i respettivi integrali. Volendo adunque esprimere la condizione opposta a quella del caso attuale, e rappresentare analiticamente, che i tre corpi sono stabiliti in modo, che dando un moto al sistema, essi corpi varino le distanze tra loro, e dal centro di rotazione, converrà eguagliare ciascheduno dei primi membri di quelle cinque equazioni differenziali, ad una corrispondente funzione differenziale.

§. XXIII.

Nel caso pertanto, in cui i tre corpi possano per l'impulso dato al sistema, variare le distanze, le cinque ultime equazioni del §. XIX. diventeranno

$$x'\delta x' + y'\delta y' = 0$$
$$x'\delta y'' - x''\delta y' = m'\delta y'' + n'\delta y'$$
$$x'\delta y''' - x'''\delta y' = m''\delta y''' + n''\delta y'$$
$$y'\delta x'' - y''\delta x' = r'\delta x'' + s'\delta x'$$
$$y'\delta x''' - y'''\delta x' = r''\delta x''' + s''\delta x',$$

onde in questa ipotesi, la sola prima delle cinque equazioni è rimasta l'istessa, come nel caso del §. XIX; perchè essendo arbitrario lo stabilire il centro degli assi, questo si può assumere nel punto, intorno a cui, per l'impulso dato al sistema, ruota il primo corpo qualunque sia, a cui si referiscono le coordinate x', e y', e rispetto al qual primo punto per conseguenza è l'istessa l'ipotesi delle distanze invariabili, come nel §. XIX, o quella delle distanze variabili in qualsivoglia modo, come si suppone adesso. Quindi rappresentando per $m', n', m'', n'', r', s', r'', s''$ funzioni arbitrarie rispetto alla arbitraria qualità del sistema, ma determinate secondo la natura dei vari sistemi, le equazioni che esprimeranno la variabilità delle distanze tanto tra un corpo, e l'altro, quanto tra ciaschedun corpo (eccetto il primo per la ragione suddetta) ed il centro degli assi, saranno

$$x'\delta x' + y'\delta y' = 0$$
$$(x' - m')\,\delta y'' - (x'' + n')\,\delta y' = 0$$
$$(x' - m'')\,\delta y''' - (x''' + n'')\,\delta y' = 0$$
$$(y' - r')\,\delta x'' - (y'' + s')\,\delta x' = 0$$
$$(y' - r'')\,\delta x''' - (y''' + s'')\,\delta x' = 0.$$

§. XXIV.

Ma per assicurarsi ulteriormente, che tali cinque equazioni rappresentino la variabilità tra le distanze, si può procedere in quest'altra maniera. Potendosi i punti per ipotesi muovere con leggi ignote, e dipendenti dalla natura dei vari sistemi, sarà

$$\delta y' : \delta y'' = M' : N'$$
$$\delta y' : \delta y''' = M'' : N''$$
$$\delta x' : \delta x'' = R' : S'$$
$$\delta x' : \delta x''' = R'' : S'',$$

supponendo M', N' ec. funzioni determinabili come sopra, e che per conseguenza serviranno a rappresentare le varie ragioni tra i moti occorsi nel senso dei due assi. Facciasi ora

$$M'=x'-m' \qquad N'=x''+n'$$
$$M''=x'-m'' \qquad N''=x'''+n''$$
$$R'=y'-r' \qquad S'=y''+s'$$
$$R''=y'-r'' \qquad S''=y'''+s''$$

ed eguagliando i prodotti degli estremi termini a quelli dei medi, avremo le stesse equazioni del §. precedente, le quali adunque rappresenteranno la variabilità tra le distanze predette.

§. XXV.

Ben intesa questa maniera di ridurre le cinque equazioni del §. XIX, che esprimono l'invariabilità delle distanze, a cinque altre, che ne esprimano la variabilità, si deduce con facilità nel caso delle distanze variabili qualche proprietà, che per le invariabili fu allora conclusa; cioè, per esempio, delle cinque equazioni del §. precedente, se ne formano le due seguenti

$$\frac{x'(y'-r')}{y''+s'}\,\delta x''+\frac{y'(x'-m')}{x''+n'}\,\delta y''=0$$

$$\frac{x'(y'-r'')}{y'''+s''}\,\delta x'''+\frac{y'(x'-m'')}{x'''+n''}\,\delta y'''=0,$$

onde si avranno anco in tale ipotesi sette equazioni, sostituendo nella prima equazione i valori di $\delta x'$, $\delta y'$ presi dalle quattro ultime; ma con queste sette equazioni non si potranno trovare le formole delle distanze tra i tre corpi, eguali ciascheduna ad una quantità costante, come resulta dalla ispezione del procedere tenuto al §. X, e seguenti.

§. XXVI.

Si vede che tra le equazioni del §. XIX. mancando le quattro ultime, o sostituendo in vece di esse le ultime quattro del §. XXIII, i tre corpi, non essendo più astretti alla condizione dell'invariabilità delle distanze, non staranno più necessariamente in equilibrio, quantunque abbiano luogo le prime (1), (2), (3), (4); onde l'ipotesi dell'equilibrio, dalla quale dobbiamo partirci per trovare l'equazione dei momenti, esige qualche altra equazione, che esprima le condizioni a tal uopo necessarie.

§. XXVII.

Per trovare tali condizioni suppongansi i tre corpi (*Fig.* 6.) a, b, c in equilibrio, e che non possano muoversi per qualunque impulso, se non parallelamente al piano della figura, che sia quello delle x, y. Ciò posto si osservi primieramente, che qualunque moto prenda ciascheduno di questi tre punti, potrà sempre considerarsi composto di progressione, e di rotazione. Quanto alla progressione, o essa è comune a tutti i punti, ed allora dovendo per l'equilibrio aver luogo le due equazioni (2), e (3) del §. XIX, quella porzione della somma dei momenti dipendente da questo, si troverà al solito = o; se poi vi sieno dei punti, o corpi, che abbiano inoltre per natura del sistema la possibilità di progredire separatamente dagli altri, o insieme con alcuni di essi, e non con tutti, in tal caso è facile accorgersi, che acciò sussista l'equilibrio, converrà, che abbiano luogo altrettante equazioni particolari, e relative a quei dati punti, le quali saranno della medesima forma delle prime, sebbene composte di minor numero di termini, e trattate come quelle, ed aggiunti i momenti indi resultanti alla somma dei momenti relativi al moto progressivo comune a tutti i corpi, la totalità di tutti i moti progressivi tanto generali, che parziali si troverà sempre = o, onde per parte del moto progressivo non si presenta difficoltà alcuna, o sia il sistema a distanze invariabili, o variabili.

§. XXVIII.

Venendo adesso a considerare i moti di rotazione, le condizioni dell'equilibrio ad essi moti appartenenti si dedurranno dal seguente immancabile principio. *Qualunque dei punti in questione, per esempio il punto b (Fig. 6.), non potrà muoversi nel piano delle* x, y *subito che gli sia impedito il moto per due diverse direzioni* bb'', bb''' *situate nel piano istesso; mentre qualunque altra direzione si supponga, che potesse prendere, parteciperà sempre di una di quelle due, per le quali per ipotesi è immobile*. Ciò posto, qualunque moto si supponga, che possano prendere i tre punti a, b, c, potrà concepirsi resultante da due moti, uno di rotazione comune a tutti i corpi intorno ad un medesimo asse, ed un altro qualunque coerentemente alla natura del sistema. Per esempio, se suppongasi che il corpo a percorra intorno al punto M l'arco elementare aa', il corpo b l'arco elementare bb', ed il corpo c l'arco elementare cc', è chiaro che i moti predetti dei corpi b, c si potranno supporre composti degli archetti bb'', cc'' concentrici all'archetto aa', e degli altri due bb''', cc''', che sieno comunque, di maniera che bb' sia resultante di bb'', bb''', e sia cc' resultante di cc'', cc'''.

§. XXIX.

Si avverta adesso, che comunque possano variare tra loro le distanze i tre corpi, descrivendo per un impulso dato al sistema i tre archi elementari aa', bb', cc', il centro delle coordinate M potrà sempre situarsi in quel punto, intorno al quale esercita la sua rotazione uno dei dati corpi, e che essendo indifferente quale sia, si supporrà essere il primo corpo a. Quindi dando un arbitrario impulso al sistema, per cui i tre corpi descrivano gli archetti aa', bb', cc', converrà per soddisfare all'ipotesi dell'equilibrio, che questi spontaneamente non possano descriversi; dunque che al corpo a sia impedito il moto aa', al corpo b i moti bb'', bb''' (componenti di bb'), e al corpo c i moti cc'', cc''' componenti di cc'.

§. XXX.

E' evidente frattanto, che acciò sieno impediti i moti concentrici aa', bb'', cc'', converrà che abbia luogo l'equazione (1) del §. XIX, con le respettive equazioni dell' invariabili distanze, e questo rappresenterà l'equilibrio del corpo a; ma per esprimere l'equilibrio degli altri due corpi b, c, è chiaro, che oltre all'aver rappresentato l'impossibilità di percorrere le componenti bb'', cc'' per mezzo della equazione (1) del §. XIX, converrà che si trovino altre equazioni, le quali esprimano l'impossibilità in cui sono di descrivere respettivamente gli altri due componenti archetti bb''', cc''', che sono in un' altra direzione, e possono non aver fra loro alcuna nota corrispondenza.

§. XXXI.

Ora è facile a dimostrarsi, che acciò un punto qualunque A (*Fig.* 7.) agitato da due forze $P\cos.\alpha$, $P\cos.\beta$ normali tra loro nelle direzioni AX, AY non possa descrivere l'archetto AA' intorno ad un qualunque centro C, conviene, che compito il rettangolo $ADCE$, stiano i lati di esso AD, AE come le respettive forze; di maniera che ponendo $AD = f$, $AE = g$, stia $f : g = P\cos.\alpha : P\cos.\beta$, e quindi abbia luogo l'equazione

$$gP\cos.\alpha - fP\cos.\beta = 0.$$

§. XXXII.

Applicando adunque questo teorema al caso nostro, acciò il punto b (*Fig.* 6.) agitato dalle forze normali $P''\cos.\alpha''$, $P''\cos.\beta''$ non possa descrivere spontaneamente, e senza estraneo impulso l'arco bb''', che può avere ovunque il suo centro, converrà che sia $P''\cos.\alpha'' : P''\cos.\beta'' = f'' : g''$, e perciò avremo

$$g''P''\cos.\alpha'' - f''P''\cos.\beta'' = 0,$$

supponendo g'', f'' due qualunque quantità eguali ai lati paralleli ad MY, MX del rettangolo composto intorno al raggio dell' archetto $b\,b'''$, il qual raggio sia preso per diagonale di quel rettangolo. Nell' istessa guisa acciò sia impedito al punto c il descrivere l' archetto $c\,c'''$ spontaneamente, e senza estraneo impulso, essendo il detto punto agitato dalle forze tra loro normali, e parallele ai due assi $P'''\cos.\alpha'''$, $P'''\cos.\beta'''$, converrà, che abbia luogo l' equazione

$$g''' P''' \cos.\alpha''' - f''' P''' \cos.\alpha''' = 0,$$

supponendo che f''', g''' sieno i lati paralleli alle MX, MY di un rettangolo formato intorno al raggio dell' arco $c\,c'''$, il qual raggio sia la diagonale di quel rettangolo.

§. XXXIII.

Queste due equazioni, ora ritrovate unite a quella (1) del §. XIX. esprimeranno le condizioni dell' equilibrio dei tre corpi, aggiungendovi le condizioni della variabilità delle distanze, e quelle della invariabilità relative all' equazione (1) predetta; e a similitudine di quello, che abbiamo fatto al §. XIX., ove le tre prime esprimevano le condizioni dell' equilibrio, e le cinque ultime rappresentavano l' invariabilità delle distanze; così nell' ipotesi attuale presenteremo prima le equazioni relative all'equilibrio, ed in seguito quelle appartenenti alle distanze.

§. XXXIV.

Avanti di esporre le equazioni di condizione per l'equilibrio, sarà utile il far conoscere le due indicate nel §. XXXII, delle quali si è stabilito la forma, ma le quantità f'', g'', f''', g''' non si sa bene cosa sieno, e debbono dipendere dai vari spazi bb', cc', che possono pel dato impulso percorrere i corpi, e dei quali spazi bb''', cc''' sono respettivamente una delle componenti. A tale oggetto suppongo adunque, che il corpo b abbia pel dato impulso percorso lo spazio bb', resultante dei due bb'', bb'''. Osservo che lo spazio bb' decomposto secondo i due assi, produrrà le variazioni, o differenze delle coordinate del punto b, e che tali differenze saranno $\delta x''$, $\delta y''$; lo spazio bb'' produrrà le differenze $\upsilon x''$, $\upsilon y''$; e lo spazio bb''' produrrà le $\delta' x''$, $\delta' y''$; avvertendo, che per distinguere tra loro le variazioni, o differenze prodotte dagli spazi bb', bb'', bb''', ho adoprato respettivamente le caratteristiche δ, υ, δ', cosicchè anco per gli altri corpi si osserverà la stessa classazione, e le variazioni prodotte dagli spazi bb', cc', saranno $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta x'''$, $\delta y'''$; quelle prodotte dagli spazi respettivi componenti bb'', cc'' concentrici ad aa', saranno $\upsilon x''$, $\upsilon y''$, $\upsilon x'''$, $\upsilon y'''$, e quelle prodotte dalle altre varie componenti respettive, cioè bb''', cc''', saranno $\delta' x''$, $\delta' y''$, $\delta' x'''$, $\delta' y'''$.

§. XXXV.

Le variazioni denotate dalla caratteristica υ, essendo quelle dipendenti da un moto, che si suppone essere lo stesso di quello, che avrebbe luogo se le distanze fossero invariabili, avranno tra loro le relazioni appartenenti a quella ipotesi, e quindi sussisteranno le seguenti equazione analoghe alle (4), (5), (6), (7), (8) del §. XIX, cioè

$$x'\delta x' + y'\delta y' = 0$$

$$x'\upsilon y'' - x''\delta y' = 0$$

$$x'\upsilon y''' - x'''\delta y' = 0$$

$$y'\upsilon x'' - y''\delta x' = 0$$

$$y'\upsilon x''' - y'''\delta x' = 0,$$

dove la prima equazione, e tutte le variazioni appartenenti al primo punto, sono rimaste colla medesima caratteristica, perchè, come abbiam notato sopra, essendosi l' origine delle coordinate posta nel centro dell' arco aa', le variazioni prodotte da questo spazio sono dello stesso genere, e meritano quindi l' istessa caratteristica, che quelle nate dagli spazi bb', cc'.

§. XXXVI.

Tra le variazioni denotate colla caratteristica δ, e che nascono dagli spazi aa', bb', cc', vi sono per ipotesi delle relazioni espresse dalle equazioni del §. XXIII, le quali per maggiore facilità ed eleganza si ridurrano ad una forma più semplice, facendo $m'=0$, $r'=0$, $m''=0$, $r''=0$, e variando l'implicito valore di n', s', n'', s'' in maniera che si conservino l'istesse le ragioni tra $\delta y'$, $\delta y''$; $\delta y'$, $\delta y'''$; $\delta x'$, $\delta x''$; $\delta x'$, $\delta x'''$, onde queste variazioni esprimenti la possibilità in cui sono i punti di variare le distanze per un dato impulso, somministreranno queste equazioni

$$x'\delta x + y'\delta y' = 0$$

$$x'\delta y'' - (x'' + n')\,\delta y' = 0$$

$$x'\delta y''' - (x''' + n'')\,\delta y' = 0$$

$$y'\delta x'' - (y'' + s')\,\delta x' = 0$$

$$y'\delta x''' - (y''' + s'')\,\delta x' = 0$$

dove la prima, per le ragioni notate precedentemente, è la stessa che la prima di quelle relative alle distanze invariabili; e quindi le equazioni del §. XXV. diventeranno

$$\frac{\delta x''}{y'' + s'} + \frac{\delta y''}{x'' + n'} = 0$$

$$\frac{\delta x'''}{y''' + s''} + \frac{\delta y'''}{x''' + n''} = 0$$

§. XXXVII.

Finalmente si troverà ancòra la relazione che passa tra le variazioni denotate colla caratteristica δ', osservando, che gli spazi bb''', cc''', i quali producono tali variazioni, unitamente agli spazi bb'', cc'', che producono le variazioni denotate colla caratteristica υ, sono respettivamente componenti degli spazi bb', cc', che producono le variazioni cólla caratteristica δ; dunque essendo bb', cc' resultanti da bb'', bb''', e da cc'', cc''', converrà che sia $\delta' x'' + \upsilon x'' = \delta x''$, $\delta' y'' + \upsilon y'' = \delta y''$, e quindi avremo $\delta' x'' : \delta' y'' = \delta x'' - \upsilon x'' : \delta y'' - \upsilon y''$; ma dalle equazioni del §. XXXV. si ricava $\upsilon x'' = \frac{y''\delta x'}{y'}$, $\upsilon y'' = \frac{x''\delta y'}{x'}$; dunque $\delta' x'' : \delta' y'' =$

$$\delta x'' - \frac{y''\delta x'}{y'} : \delta y'' - \frac{x''\delta y'}{x'}.$$

§. XXXVIII.

Si prendano adesso dall'equazioni del §. XXXVI. i valori $\delta x' = \frac{y'}{y''+s'}\,\delta x''$, $\delta y' = \frac{x'}{x''+n'}\,\delta y''$, e sostituiti nella precedente analogia, avremo $\delta' x'' : \delta' y'' = \delta x'' - \frac{y''}{y''+s'}\,\delta x'' :$

$\delta y'' - \frac{x''}{x''+n'}\delta y'' = \frac{s'\delta x''}{y''+s'} : \frac{n'\delta y''}{x''+n'}$. Ma dalla penultima equazione del medesimo §. XXXVI. abbiamo $\frac{\delta x''}{y''+s'} = -\frac{\delta y''}{x''+n'}$ dunque la precedente analogia si ridurrà alla seguente $\delta' x'' : \delta' y'' = s' : -n'$; e quindi si ottiene l'equazione

$$n'\delta' x'' + s'\delta' y'' = 0,$$

e nel modo istesso, e seguendo l' istesso procedere, impiegando le analoghe opportune equazioni, si otterrà per il corpo c l'equazione

$$n''\delta' x''' + s''\delta' y''' = 0$$

onde ancor tra queste variazioni designate dalla caratteristica δ' si viene a rendere palese la relazione.

§. XXXIX.

Per determinare adesso per mezzo delle quantità n', s', n'', s'', le quantità f'', f''', g'', g''', si supponga, che l'archetto componente bb''' (e l'istesso discorso si potrà ripetere per l'altro analogo componente cc''') sia rappresentato dall' archetto parimente infinitesimo AA' (*Fig.* 7.).

Si conduca la $A'B$ normale alla linea AX parallela all'asse delle x, ed avremo $AB = \delta' x''$, $A'B = \delta' y''$. L'arco AA' per ipotesi non può descriversi dal punto, o corpo corrispondente, e dunque per il teorema del §. XXXI. le forze $P''\cos.\alpha''$, $P''\cos.\beta''$ dalle quali è agitato, stanno tra loro come $f'' : g''$, cioè come $AD : AE$, cioè come i lati paralleli agli assi, di un rettangolo formato con la diagonale AC, che è il raggio dell'arco AA'; ma per i triangoli simili abbiamo $-\delta' x'' : \delta' y'' = AE : AD$; e si noti che conviene il segno negativo ad uno dei primi termini, che sono variazioni dei due secondi di questa analogìa, perchè se il primo è in aumento del terzo, il secondo è in decremento del quarto e viceversa. Quindi avremo $-\delta' x'' : \delta' y'' = P''\cos.\beta'' : P''\cos.\alpha''$; ma nel §. precedente trovammo $-\delta' x'' : \delta' y'' = s' : n'$; dunque finalmente sarà $s' : n' = P''\cos.\beta'' : P''\cos.\alpha''$, ed avrà luogo l'equazione $s' P''\cos.\alpha'' - n' P''\cos.\beta'' = 0$; e nella stessa guisa si troverà per il corpo c l'equazione $s'' P'''\cos.\alpha''' - n'' P'''\cos.\beta''' = 0$, onde finalmente si sono assegnate le quantità f'', f''', g'', g''', e stabilite in termini corrispondenti alle ipotesi delle distanze comunque variabili fra i tre corpi costituenti il sistema, cioè in termini composti delle quantità n', n'', s', s'', tutte le equazioni, che doveano tra esse aver luogo, per soddisfare alle condizioni dell'equilibrio.

§. XL.

Saranno adunque tutte le equazioni dell' equilibrio come appresso.

$$(1)\quad P'\cos.\alpha'+P''\cos.\beta''+P'''\cos.\alpha'''=0$$

$$(2)\quad P'\cos.\beta'+P'\cos.\beta''+P'''\cos.\beta'''=0$$

$$(3)\quad P'(x'\cos.\beta'-y'\cos.\alpha')+P''(x''\cos.\beta''-y''\cos.\alpha'')$$
$$+P'''(x'''\cos.\beta'''-y'''\cos.\alpha''')=0$$

$$(4)\quad s'P''\cos.\alpha''-n'P''\cos.\beta''=0$$

$$(5)\quad s''P'''\cos.\alpha'''-n''P'''\cos.\beta'''=0$$

$$(6)\quad x'\delta x'+y'\delta y'=0$$

$$(7)\quad x'\delta y''-(x''+n')\delta y'=0$$

$$(8)\quad x'\delta y'''-(x'''+n'')\delta y'=0$$

$$(9)\quad y'\delta x''-(y''+s')\delta x'=0$$

$$(10)\quad y'\delta x'''-(y'''+s'')\delta x'=0$$

$$(11)\quad x'\upsilon y''-x''\delta y'=0$$

$$(12)\quad x'\upsilon y'''-x'''\delta y'=0$$

$$(13)\quad y'\upsilon x''-y''\delta x'=0$$

$$(14)\quad y'\upsilon x'''-y'''\delta x'=0$$

$$(15)\quad n'\delta x''+s'\delta y''=0$$

$$(16)\quad n''\delta x'''+s''\delta y'''=0.$$

§. XLI.

Ad oggetto di raccogliere adesso l'equazione dei momenti dedotta dal Principio delle Velocità Virtuali, gioverà prima il fare qualche considerazione sopra le equazioni precedenti, e rilevare più intrinsecamente l'influenza che esse hanno nel fissare le condizioni dell'equilibrio. Le equazioni (1) e (2) è chiaro che impediscono il moto progressivo, che il sistema tutto insieme, e come se fosse a distanze costanti, potrebbe prendere, non occorrendo entrare in dettaglio intorno ai particolari moti progressivi, che qualunque dei punti fosse per avere, perchè questi esigerebbero delle equazioni per quanto differenti nel numero dei termini, analoghe nella forma a quelle due, e perciò trattabili come quelle, ed altronde intesa l'analisi dei moti rotatori non vi è difficoltà per i progressivi, i quali non sono che rotazioni per un arco infinitamente grande.

§. XLII.

L'equazione (3) insieme con le equazioni (6), (11), (12), (13), e (14) impedisce che i tre corpi possano ruotare insieme di rotazione comune intorno all'origine degli assi. Ma questo non serve per l'equilibrio nel caso attuale che le distanze sono variabili, onde in fatti è convenuto dalle predette equazioni (11), (12), (13), e (14) unitamente alle (15), e (16) dedurne le due (4), e (5), che rappresentano l'impossibilità in cui sono i corpi *b*, *c* di ruotare intorno ad altri punti, i quali non sono quello ove è il centro, o origine degli assi; e quindi per il Principio esposto al §. XXVIII, essendo ad essi impedito il moto per due diverse direzioni, qualunque moto in quel piano diventa impossibile; e l'equilibrio adunque in tutti tre i corpi è stabilito, mentre l'equazioni predette (11), (12), (13), e (14), oltre all'impedire insieme con l'equazioni (3), e (6) il moto comune di rotazione, servono a dedurre le equazioni (4), e (5), che impediscono le rotazioni parziali.

§. XLIII.

Per trovare l'equazione dei momenti, posto che si verifichino le equazioni (1), (2), (3), (4), e (5), suppongasi, che per un impulso i tre corpi abbiano descritto nel senso dei due assi, gli spazietti infinitesimi, determinati dalle equazioni, che seguono le precitate. Ciò posto, dalle equazioni (7), (8), (9), e (10), avremo

$$x'' = \frac{x'\delta y''}{\delta y'} - n'$$

$$x''' = \frac{x'\delta y'''}{\delta y'} - n''$$

$$y'' = \frac{y'\delta x''}{\delta x'} - s'$$

$$y''' = \frac{y'\delta x'''}{\delta x'} - s''$$

e considerando che $x' = \frac{x'\delta y'}{\delta y'}$, $y' = \frac{y'\delta x'}{\delta x'}$, potremo sostituire per tutte le coordinate, che sono nell' equazione (3) i loro ritrovati valori, ed otterremo la trasformata seguente

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x'}{\delta y'}\,(P'\delta y'\cos.\beta' + P''\delta y''\cos.\beta'' + P'''\delta y'''\cos.\beta''') \\ -\frac{y'}{\delta x'}\,(P'\delta x'\cos.\alpha' + P''\delta x''\cos.\alpha'' + P'''\delta x'''\cos.\alpha''') \\ \quad - n'P''\cos.\beta'' - n''P'''\cos.\beta''' \\ \quad + s'P''\cos.\alpha'' + s''P'''\cos.\alpha''' \end{array}\right\} = 0$$

§. XLIV.

Si osservi frattanto, che le prime due righe di questa trasformata, mediante l' equazione (6), sostituendo

$-\frac{x'}{\delta x'}$ in vece di $\frac{y'}{\delta x'}$, e supponendo, che $d\pi'$, $d\pi''$, $d\pi'''$ sieno le variazioni occorse nella direzione delle forze per i moti rotatori, e riducendosi a memoria le solite formole

$$P'\delta x' \cos. \alpha' + P'\delta y' \cos. \beta' = P' d\pi'$$

$$P''\delta x'' \cos. \alpha'' + P''\delta y'' \cos. \beta'' = P'' d\pi''$$

$$P'''\delta x''' \cos. \alpha''' + P'''\delta y''' \cos. \beta''' = P''' d\pi'''$$

quelle due prime righe, io dico, si riducono alla forma seguente, $\frac{x'}{\delta y'}(P'd\pi' + P''d\pi'' + P'''d\pi''')$, che è la somma dei momenti rispetto ai moti rotatori, e che dunque non sarà $= 0$, se non saranno per se stesse $= 0$ le altre due righe della suddetta trasformata.

§. XLV.

Si avverta adesso, che di tutte l'equazioni del §. XL, non si è ancòra fatto uso; dunque non si sono introdotte le condizioni tutte dell'equilibrio, ma facendo conto delle due equazioni (4), e (5), le quali si sono ottenute dalle altre, che ancòra non hanno avuto luogo nel nostro calcolo, e quindi introducendo tutte le condizioni dell'equilibrio, si trova la somma di quelle due equazioni eguale alle due righe ultime della precedente trasformata, le quali due righe adunque appena dato luogo a tutte le condizioni dell' equilibrio, si ridurranno per se stesse $= 0$, e lasceranno la somma dei momenti dipendenti dai moti rotatori $= 0$, mentre la trasformata divisa per $\frac{x'}{\delta y'}$ diventerà $P' d\pi'' + P'' d\pi'' + P''' d\pi''' = 0$; onde aggiuntivi i momenti procedenti dai moti progressivi (come per le cose precedentemente spiegate è molto facile) ne risulterà anco per questo sistema a distanze comunque variabili l'equazione medesima dei momenti, che si deduce dal Principio delle Velocità Virtuali.

§. XLVI.

Che se in vece di essere il sistema a distanze variabili rispetto a tutti tre i corpi, due di essi, per esempio, *b*, e *c* fossero tra loro a distanze costanti, ma variabili rispetto all' altro *a*; in tal caso le due equazioni (4), e (5) non avrebbero luogo separatamente, ma non per questo non si troverebbe nella stessa guisa $= 0$ la somma dei momenti. In fatti, se i corpi *b*, e *c* siano tra loro a distanze invariabili, sarà sempre vero nonostante, che gli spazi qualunque, essi fossero per descrivere in virtù d' un indeterminato impulso, cioè bb', cc', si potranno considerare come resultanti dei due bb'', cc'', e bb''', cc''', i primi concentrici all'arco aa', e descritti d' una rotazione eguale, e comune col corpo aa', e gli altri due, cioè bb''', cc''' descritti per una rotazione comune ed eguale intorno ad un medesimo punto, ma diverso da quello intorno a cui è seguita la rotazione aa'.

§. XLVII.

Ciò posto, essendo per ambedue questi corpi l'istesso punto C (*Fig.* 7) quello, intorno a cui si esercita la rotazione bb''', cc''', ed essendo f'', g'', f''', g''' le coordinate parallele agli assi delle x, e y, e referite a questo punto C, è chiaro, che acciò queste rotazioni bb''', cc''' non possano senza impulso estraneo spontaneamente aver luogo, in vece delle due equazioni (4), e (5) dependenti dal Teorema del §. XXXI. converrà che abbiano luogo le equazioni seguenti

$$P''(g''\cos.\alpha''-f''\cos.\beta'')+P'''(g'''\cos.\alpha'''-f'''\cos.\beta''')=0$$

$$g''\delta'y''+f''\delta'x''=0$$

$$g'''\delta'y'''+f'''\delta'x'''=0$$

$$f''\delta'y'''-f'''\delta'y''=0$$

$$g''\delta'x'''-g'''\delta'x''=0.$$

§. XLVIII.

Seguendo adunque l'analisi relativa ai sistemi a distanze invariabili, avremo

$$f'' = \frac{f''\delta' y''}{\delta' y''}$$

$$f''' = \frac{f''\delta' y'''}{\delta' y''}$$

$$g'' = \frac{g''\delta' x''}{\delta' x''}$$

$$g''' = \frac{g''\delta' x'''}{\delta' x''}$$

onde l'equazione prima del §. precedente, mediante le sostituzioni di questi valori delle f'', f''', g'', g''' ec. diventerà

$$\frac{g''}{\delta' x''}\,(P''\cos.\alpha''\delta' x'' + P'''\cos.\alpha'''\delta' x''')$$

$$-\frac{f''}{\delta' y''}\,(P''\cos.\beta''\delta' y'' + P'''\cos.\beta'''\delta' y''') = 0,$$

e per l'equazione seconda del medesimo §. precedente, essendo $\frac{g''}{\delta' x''} = -\frac{f''}{\delta' y''}$, avremo

$$P''\cos.\alpha''\delta' x'' + P''\cos.\alpha'''\delta' x'''$$

$$+ P''\cos.\beta''\delta' y'' + P'''\cos.\beta'''\delta' y''' = 0.$$

§. XLIX.

Ma dalle equazioni (15), e (16) del §. XL. abbiamo

$$\delta' x'' = -\frac{s'\delta' y''}{n'}$$

$$\delta' x''' = -\frac{s''\delta' y'''}{n''}$$

onde sostituendo questi valori la nostra trasformata diventerà

$$-\frac{s'\delta' y''}{n'} P'' \cos.\alpha'' + P'' \cos.\beta'' \delta' y''$$

$$-\frac{s''\delta' y'''}{n''} P''' \cos.\alpha''' + P''' \cos.\beta''' \delta' y''' = 0,$$

cioè

$$\frac{\delta' y''}{n'} (s' P'' \cos.\alpha'' - n' P'' \cos.\beta'')$$

$$+\frac{\delta' y'''}{n''} (s'' P''' \cos.\alpha''' - n'' P''' \cos.\beta''') = 0,$$

onde per ridurre l'equazione proposta alla forma opportuna, non resta che dimostrare essere $\delta' y'' : \delta' y''' = n' : n''$.

§. L.

A tale oggetto si consideri, che non potendo per ipotesi i due corpi b, c variare tra loro le distanze, tale condizione, che si è rappresentata per mezzo delle quattro ultime equazioni del §. XLVII, rispetto alle variazioni designate colla caratteristica δ', è necessario rappresentarla anco rispetto alle variazioni designate colla caratteristica δ. Ora è chiaro, che otterremo questo, eguagliando ad una costante l'espressione di quella distanza, cioè $\sqrt{(x'''-x'')^2+(y'''-y'')^2}$, ovvero ponendo $=0$ il differenziale di questa quantità, onde avremo

$$(x'''-x'')(\delta x'''-\delta x'')+(y'''-y'')(\delta y'''-\delta y'')=0.$$

§. LI.

Ma sottraendo l'equazione (9) del §. XL, dalla (10) abbiamo

$$\delta x'''-\delta x''=\frac{(y'''+s''-y''-s')\,\delta x'}{y'}$$

e sottraendo l'equazione (7) del medesimo paragrafo, dalla (8) si ottiene

$$\delta y'''-\delta y''=\frac{(x'''+n''-x''-n')\,\delta y'}{x'}$$

onde sostituendo queste quantità nell'equazione del §. precedente, e considerando, che per l'equazione (6) del §. XL. suddetto $\frac{\delta y'}{x'}=-\frac{\delta x'}{y'}$, avremo

$$(x''' - x'')(y''' + s'' - y'' - s') =$$
$$(y''' - y'')(x''' + n'' - x'' - n')$$

cioè $x'''s'' - x'''s' - x''s'' + x''s' = y'''n'' - y'''n' - y''n'' + y''n'$, ovvero $(x''' - x'')(s'' - s') = (y''' - y'')(n'' - n')$.

§. LII.

Suppongasi adesso, che il punto intorno a cui girano per rotazione parziale, e comune a loro due, i corpi b, c, sia situato in modo, che rispetto all'origine delle coordinate, sia esso distante nel senso delle x della quantità ξ, e nel senso delle y della quantità η dall'origine medesima; è chiaro, che sarà $x'' = \xi + f''$, $x''' = \xi + f'''$, $y'' = \eta + g''$, $y''' = \eta + g'''$; e sostituendo tali valori nell'ultima equazione del §. precedente, essa diventerà $(f''' - f'')(s'' - s') = (g''' - g'')(n'' - n')$.

§. LIII.

Abbiamo per causa delle equazioni (15), e (16) del §. XL, e delle equazioni seconda, e terza del §. XLVII, ed inoltre per le riflessioni sino al presente esposte, tra le quantità f'', f''', g'', g''', n', n'', s', s'' le relazioni seguenti,

$$n' : s' = f'' : g'', \text{ cioè } n'g'' = s'f''$$
$$n'' : s'' = f''' : g''', \text{ cioè } n''g''' = s''f'''$$
$$n'' - n' : s'' - s' = f''' - f'' : g''' - g'',$$

cioè $$(n''-n')(g'''-g'')=(s''-s')(f'''-f''),$$
e si tratta di dedurre quindi le altre due relazioni $n'f'''=n''f''$, $s'g'''=s''g''$.

§. LIV.

La terza delle precitate tre equazioni eseguendo la moltiplicazione diventa $g'''n''-g''n''-n'g'''+n'g''=s''f'''-s''f''-s'f'''+s'f''$, e sottraendo da questa le due antecedenti si ottiene $g''n''+n'g'''=s''f''+s'f'''$, e quivi sostituendo i valori di $g''=\frac{s'f''}{n'}$, $g'''=\frac{s''f'''}{n''}$, avremo

$$\frac{s'f''n''}{n'}+\frac{s''f'''n'}{n''}=s''f''+s'f''',$$

cioè $$f''\left(\frac{s'n''}{n'}-s''\right)=f'''\left(s'-\frac{s''n'}{n''}\right),$$

cioè $$\frac{f''}{n'}(s'n''-n's''=\frac{f'''}{n''}(s'n''-s''n'),$$

onde finalmente $f''n''=f'''n'$; e sostituendo i valori di f'', f''' in vece dei valori di g'', g''', si sarebbe egualmente ottenuto $s'g'''=s''g''$.

§. LV.

Avremo pertanto l'equazione $n'\delta'y'''=n''\delta'y''$, onde dividendo per $\frac{\delta'y'''}{n''}$, o per $\frac{\delta'y''}{n'}$ (che è l'istesso) la trasformata ultima del §. XLIX., essa finalmente diventerà

$$s'P''\cos.\alpha''-n'P''\cos.\beta''+s''P'''\cos.\alpha'''-n''P'''\cos.\beta'''=0,$$

la quale risulta da tutte le condizioni necessarie per impedire la rotazione parziale, ma comune ai due corpi b, c, e perciò nell'istessa guisa, che le due (4), e (5) del §. XL, per l'ipotesi delle distanze tutte variabili, adempiono insieme con le altre alle condizioni dell'equilibrio, così nell'ipotesi attuale della distanza costante tra due dei corpi del sistema, vi adempie, insieme con l'altre, l'unica precedente equazione, e perciò l'equazione dei momenti si raccoglie egualmente in questa, ed in ogni altra analoga circostanza.

§. LVI.

Nella prima parte trattandosi di sistemi a distanze invariabili, per i quali erano note l'equazioni di condizione dell'equilibrio, il dedurne l'equazione dei momenti, non ha presentato altra difficoltà, se non quella di esprimere analiticamente tale invariabilità di distanze, e ridurre ad una sola tutte le equazioni occorse. Nell'ipotesi attuale delle distanze variabili, è convenuto inoltre principiare dal fissare le equazioni condizionali dell'equilibrio, e della variabilità delle distanze, scegliendo fra tutte le possibili maniere quella, che poteva presentare equazioni condizionali dotate d'una generalità tale da ridursi a qualunque imaginabile sistema, o ammasso di molecole materiali in equilibrio. Siccome peraltro ciò che fino ad ora si è dimostrato di tre corpi in un piano istesso, potrebbe senza difficoltà estendersi ad un numero qualsivoglia di corpi nel piano medesimo, ma forse non sarà sempre facile estenderlo ad altrettanti corpi, o punti in equilibrio, e mobili in tutti i sensi, così gioverà presentare la questione come segue in tutta la possibile generalità, avvertendo, che per chi abbia penetrato lo spirito del metodo, l'estendere il numero delle equazioni al caso di una maggiore quantità di corpi, o punti, non sarebbe che un allungamento inutile di calcolo, capace di abbagliare gli occhi piuttosto, che d'illustrare ulteriormente la materia in questione.

§. LVII.

Suppongasi adunque con tutta la generalità un sistema composto di quanti si vogliano corpi, o punti in equilibrio, agitati da forze comunque, e suppongasi, che rompendosi l'equilibrio, possano i detti punti variare le respettive distanze, movendosi in tutti i sensi. Si concepiscano i soliti tre assi delle x, y, z, e che decomposte parallelamente a ciascheduno di essi assi le forze P', P'', P''' ec., applicate al primo, secondo, terzo ec. corpo, o punto del sistema, sieno respettivamente $P'\cos.\alpha'$, $P''\cos.\alpha''$, $P'''\cos.\alpha'''$ ec.; $P'\cos.\beta'$, $P''\cos.\beta''$, $P'''\cos.\beta'''$ ec.; $P'\cos.\gamma'$, $P''\cos.\gamma''$, $P'''\cos.\gamma'''$ ec.; di maniera che le direzioni delle suddette forze P', P'', P''' ec. facciano coll'asse delle x gli angoli α', α'', α''' ec.; coll'asse delle y gli angoli β', β'', β''' ec.; e con quello delle z gli angoli γ', γ'', γ''' ec.

§. LVIII.

Qualunque moto possano prendere nel rompersi l'equilibrio i punti componenti il sistema, tali moti potranno sempre referirsi a ciascheduno dei tre piani delle x, y, delle x, z, e delle y, z. Ciò posto, stando il sistema in equilibrio, se questo per un impulso si venga a rompere, l'equazioni relative all'equilibrio, ed alle variabili distanze, il tutto referito al solo piano delle x, y, saranno le seguenti, supponendo che l'origine delle coordinate sia in quel punto, intorno a cui il primo corpo, o punto del sistema eseguisce la sua rotazione intorno all'asse delle z, o sia la sua rotazione referita al piano delle x, y. Tali equazioni adunque saranno

$$(1)\quad P'\cos.\alpha' + P''\cos.\alpha'' + P'''\cos.\alpha''' + \text{ec.} = 0$$

$$(2)\quad P'\cos.\beta' + P''\cos.\beta'' + P'''\cos.\beta''' + \text{ec.} = 0$$

$$(3)\quad P'(x'\cos.\beta' - y'\cos.\alpha') + P''(x''\cos.\beta'' - y''\cos.\alpha'')$$
$$+ P'''(x'''\cos.\beta''' - y'''\cos.\alpha''') + \text{ec.} = 0$$

$$(4)\quad s'P''\cos.\alpha'' - n'P''\cos.\beta'' = 0$$

$$(5)\quad s''P'''\cos.\alpha''' - n''P'''\cos.\beta''' = 0$$

ec.

$$(6)\quad x'\delta x' + y'\delta y' = 0$$

$$(7)\quad x'\delta y'' - (x'' + n')\delta y' = 0$$

$$(8)\quad x'\delta y''' - (x''' + n'')\delta y' = 0$$

$$(9)\quad y'\delta x'' - (y'' + s')\delta x' = 0$$

$$(10)\quad y'\delta x''' - (y''' + s'')\delta x' = 0$$

ec.

$$(11)\quad x'\upsilon y'' - x''\delta y' = 0$$

$$(12)\quad x'\upsilon y''' - x'''\delta y' = 0$$

$$(13)\quad y'\upsilon x'' - y''\delta x' = 0$$

$$(14)\quad y'\upsilon x''' - y'''\delta x' = 0$$

ec.

$$(15)\quad n'\delta' x'' + s'\delta' y'' = 0$$

$$(16)\quad n''\delta' x''' + s''\delta' y''' = 0.$$

ec.

§. LIX.

Quanto ai moti referiti al piano delle x, z, e in conseguenza per i moti progressivi nel senso delle x, e delle z, e per i moti rotatori intorno all' asse delle y, avremo un' altra serie di equazioni analoghe alle precedenti. Ma comecchè nel senso delle x per tal moto rotatorio vi saranno delle variazioni, che potranno esser diverse da quelle occorse in questo medesimo senso per il moto rotatorio intorno all' asse delle z, così diversificheremo le caratteristiche delle respettive variazioni, o differenze, e porremo Υ in vece di υ, Δ in vece di δ, e Δ' in vece di δ'. Inoltre, siccome la rotazione del primo corpo referita a questo piano può succedere intorno ad un asse parallelo è vero alle y, ma distante da esso corpo non egualmente che quello, intorno al quale è seguita la rotazione del medesimo corpo referita al piano delle x, y, così supporremo, che tal distanza in vece di essere x', e z', sia $x' \pm \xi$, $z' \pm \zeta$, ed in conseguenza varieranno respettivamente tutte le corrispondenti equazioni. Di più, a fine di esprimere la variabilità delle distanze per i moti occorsi in questo piano, non potremo servirci delle medesime quantità n', n'', s', s'', che servono per rappresentare tale variabilità nel piano delle x, y; onde prenderemo le quantità m', m'', r', r'' per la corrispondente attuale significazione della variabilità delle distanze nel piano delle x, z. Finalmente l'equazione (1) del §. precedente si ripete nella seguente serie d'equazioni, per completare l'enunciazione dei moti progressivi comuni a tutti i corpi, e referibili al piano delle x, z; e gioverà rammentare, che dei moti progressivi parziali appartenenti più ad uno dei corpi, che ad un altro, non si dettagliano l'equazioni, perchè si è notato come ciò possa alle occasioni supplirsi, e sarà in seguito ancòra più facile il convincersene.

§. LX.

Previe le avvertenze sopraenunciate, saranno adunque facilmente intelligibili le seguenti equazioni relative al piano delle x, z.

$$(1)\quad P'\cos.\alpha' + P''\cos.\alpha'' + P'''\cos.\alpha''' + \text{ec.} = 0$$

$$(2)\quad P'\cos.\gamma' + P''\cos.\gamma'' + P'''\cos.\gamma''' + \text{ec.} = 0$$

$$(3)\quad P'(x'\cos.\gamma' - z'\cos.\alpha') + P''(x''\cos.\gamma'' - z''\cos.\alpha'')$$
$$+ P'''(x'''\cos.\gamma''' - z'''\cos.\alpha''') + \text{ec.} = 0$$

$$(4)\quad r'P''\cos.\alpha'' - m'P''\cos.\gamma'' = 0$$

$$(5)\quad r''P'''\cos.\alpha''' - m''P'''\cos.\gamma''' = 0$$

ec.

$$(6)\quad (x'+\xi)\Delta x' + (z'+\zeta)\delta z' = 0$$

$$(7)\quad (x'+\xi)\delta z'' - (x''+\xi+m')\delta z' = 0$$

$$(8)\quad (x'+\xi)\delta z''' - (x'''+\xi+m'')\delta z' = 0$$

$$(9)\quad (z'+\zeta)\Delta x'' - (z''+\zeta+r')\Delta x' = 0$$

$$(10)\quad (z'+\zeta)\Delta x''' - (z'''+\zeta+r'')\Delta x' = 0$$

ec.

$$(11)\quad (x'+\xi)\,\upsilon z'' - (x''+\xi)\delta z' = 0$$

$$(12)\quad (x'+\xi)\,\upsilon z''' - (x'''+\xi)\delta z' = 0$$

$$(13)\quad (z'+\zeta)\Upsilon x'' - (z''+\zeta)\Delta x' = 0$$

$$(14)\quad (z'+\zeta)\Upsilon x''' - (z'''+\zeta)\Delta x' = 0$$

$$(15)\quad m'\Delta' x'' + r'\delta' z'' = 0$$

$$(16)\quad m''\Delta' x''' + r'\delta' z''' = 0$$

ec.

§. LXI.

Rispetto finalmente ai moti referibili al piano delle y, z, avremo un'altra serie di equazioni. E siccome nel senso delle y, e delle z vi saranno per i moti rotatori intorno all'asse delle x delle variazioni, che potranno essere diverse da quelle occorse nei medesimi sensi per i moti rotatori intorno all'asse delle z, e a quello delle y, e referibili quindi agli altri due piani, così converranno sempre le caratteristiche Δ, Δ', Υ. Rispetto al designare la possibilità che ha il primo corpo di ruotare intorno ad un asse parallelo alle x, ma distante da esso primo corpo più di quello, che fossero dal medesimo distanti gli altri due assi intorno ai quali abbiamo considerato la rotazione, supporremo, che tale distanza invece di essere y, e z, sia $y \pm \mu$, e $z \pm \nu$. Si avverte ancòra, che a fine di rappresentare la variabilità delle distanze per i moti rotatori referiti a questo piano delle y, z, ci serviremo delle lettere q', q'', t', t'', che corrisponderanno rispetto a questo piano, a quello che rispetto al piano delle x, z sono le quantità m', m'', r', r''; e rispetto al piano delle x, y sono le quantità n', n'', s', s''. Finalmente si ripete quì l'equazione (2) del §. LVIII. per completare l'enunciazione dei moti progressivi comuni a tutti i corpi, e referibili al piano delle y, z, rimettendoci quanto ai moti progressivi parziali a quello che si è accennato precedentemente.

§. LXII.

Saranno pertanto le equazioni relative al piano delle y, z, come appresso.

$$(1)\quad P'\cos.\beta'+P''\cos.\beta''+P'''\cos.\beta'''+\text{ec.}=0$$

$$(2)\quad P'\cos.\gamma'+P''\cos.\gamma''+P'''\cos.\gamma'''+\text{ec.}=0$$

$$(3)\quad P'(y'\cos.\gamma'-z'\cos.\beta')+P''(y''\cos.\gamma''-z''\cos.\beta'')$$
$$+P'''(y'''\cos.\gamma'''-z'''\cos.\beta''')+\text{ec.}=0$$

$$(4)\quad t'P''\cos.\beta''-q'P''\cos.\gamma''=0$$

$$(5)\quad t''P'''\cos.\beta'''-q''P'''\cos.\gamma'''=0$$

ec.

$$(6)\quad (y'+\mu)\Delta y'+(z'+\nu)\Delta z'=0$$

$$(7)\quad (y'+\mu)\Delta z''-(y''+\mu+q')\Delta z'=0$$

$$(8)\quad (y'+\mu)\Delta z'''-(y'''+\mu+q'')\Delta z'=0$$

$$(9)\quad (z'+\nu)\Delta y''-(z''+\nu+t')\Delta y'=0$$

$$(10)\quad (z'+\nu)\Delta y'''-(z'''+\nu+t'')\Delta y'=0$$

ec.

$$(11)\quad (y'+\mu)\Upsilon z''-(y''+\mu)\Delta z'=0$$

$$(12)\quad (y'+\mu)\Upsilon z'''-(y'''+\mu)\Delta z'=0$$

$$(13)\quad (z'+\nu)\Upsilon y''-(z''+\nu)\Delta y'=0$$

$$(14)\quad (z'+\nu)\Upsilon y'''-(z'''+\nu)\Delta y'=0$$

$$(15)\quad q'\Delta' y''+t'\Delta' z''=0$$

$$(16)\quad q''\Delta' y'''+t''\Delta' z'''=0$$

ec.

§. LXIII.

Stabilite cosi l' equazioni necessarie, dalle quali si deduce come secondo le occorrenze possano aversi le altre, che abbisognassero, a norma di quanto si è per esempio esposto al §. XLVI, e seguenti, raccoglieremo l'equazione dei momenti nel modo seguente. Dalle equazioni (7), (8), (9), e (10) del §. LVIII. avremo i seguenti valori

$$x'' = \frac{x'\delta y''}{\delta y'} - n'$$

$$x''' = \frac{x'\delta y'''}{\delta y'} - n''$$

ec.

$$y'' = \frac{y'\delta x''}{\delta x'} - s'$$

$$y''' = \frac{y'\delta x'''}{\delta x'} - s''$$

ec.

e considerando, che $x' = \frac{x'\delta y'}{\delta y'}$, $y' = \frac{y'\delta x'}{\delta x'}$, potremo sostituire tutti i valori delle coordinate, che trovansi nell' equazione (3) del §. LVIII. medesimo, ed essa resterà trasformata come appresso

$$\left.\begin{array}{c}\frac{x'}{\delta y'}(P'\delta y'\cos.\beta'+P''\delta y''\cos.\beta''+P'''\delta y'''\cos.\beta'''+\text{ec.})\\ -\frac{y'}{\delta x'}(P'\delta x'\cos.\alpha'+P''\delta x''\cos.\alpha''+P'''\delta x'''\cos.\alpha'''+\text{ec.})\\ -n'P''\cos.\beta''-n''P'''\cos.\beta'''\\ +s'P''\cos.\alpha''+s''P'''\cos.\alpha'''\\ \text{ec.}\end{array}\right\}=0$$

§. LXIV.

Parimente dalle equazioni (7), (8), (9), e (10) del §. LX. avremo i valori seguenti

$$x''=\frac{(x'+\xi)\delta z''}{\delta z'}-\xi-m'$$

$$x'''=\frac{(x'+\xi)\delta z'''}{\delta z'}-\xi-m''$$

ec.

$$z''=\frac{(z'+\zeta)\Delta x''}{\Delta x'}-\zeta-r'$$

$$z'''=\frac{(z'+\zeta)\Delta x'''}{\Delta x'}-\zeta-r''$$

ec.

e considerando in oltre, che $x'=\frac{(x'+\xi)\delta z'}{\delta z'}-\xi$,

$z' = \frac{(z'+\zeta)\,\Delta x'}{\Delta x'} - \zeta$, potremo trasformare l'equazione (3) del §. suddetto, ed essa diventerà

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{x'+\xi}{\delta z'}(P'\delta z'\cos.\gamma' + P''\delta z''\cos.\gamma'' + P'''\delta z'''\cos.\gamma''' + \text{ec.}) \\
-\frac{z'+\zeta}{\Delta x'}(P'\Delta x'\cos.\alpha' + P''\Delta x''\cos.\alpha'' + P'''\Delta x'''\cos.\alpha''' + \text{ec.}) \\
\qquad -\xi(P'\cos.\gamma' + P''\cos.\gamma'' + P'''\cos.\gamma''' + \text{ec.}) \\
\qquad +\zeta(P'\cos.\alpha' + P''\cos.\alpha'' + P'''\cos.\alpha''' + \text{ec.}) \\
\qquad -m'P''\cos.\gamma'' - m''P'''\cos.\gamma''' \\
\qquad +r'P''\cos.\alpha'' + r''P'''\cos.\alpha''' \\
\qquad\qquad \text{ec.}
\end{array}\right\} = 0$$

§. LXV.

Finalmente dalle equazioni (7), (8), (9), e (10) del §. LXII, ricaveremo i valori seguenti

$$y'' = \frac{(y'+\mu)\,\Delta z''}{\Delta z'} - \mu - q'$$

$$y''' = \frac{(y'+\mu)\,\Delta z'''}{\Delta z'} - \mu - q''$$

ec.

$$z'' = \frac{(z'+\nu)\,\Delta y''}{\Delta y'} - \nu - t'$$

$$z''' = \frac{(z'+\nu)\,\Delta y'''}{\Delta y'} - \nu - t''$$

ec.

ed avendosi $y' = \frac{(y'+\mu)\,\Delta z'}{\Delta z'} - \mu$, $z' = \frac{(z'+\nu)\,\Delta y'}{\Delta y'} - \nu$,

potremo con questi valori sostituiti nell'equazione (3) del medesimo §. LXII. ottenere la trasformata seguente

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{y'+\mu}{\Delta z'}(P'\Delta z'\cos.\gamma' + P''\Delta z''\cos.\gamma'' + P'''\Delta z'''\cos.\gamma''' + \text{ec.}) \\[2ex]
-\frac{z'+\nu}{\Delta y'}(P'\Delta y'\cos.\beta' + P''\Delta y''\cos.\beta'' + P'''\Delta y'''\cos.\beta''' + \text{ec.}) \\[1ex]
\quad -\mu\,(P'\cos.\gamma' + P''\cos.\gamma'' + P'''\cos.\gamma''' + \text{ec.}) \\
\quad +\nu\,(P'\cos.\beta' + P''\cos.\beta'' + P'''\cos.\beta''' + \text{ec.}) \\
\quad -q'P''\cos.\gamma'' - q''P'''\cos.\gamma''' \\
\quad +t'P''\cos.\beta'' + t''P'''\cos.\beta''' \\
\qquad\qquad \text{ec.}
\end{array}\right\} = 0$$

§. LXVI.

Sommando adesso insieme queste tre trasformate, avremo

$$0 = \frac{x'}{\delta y'}(P'\delta y'\cos.\beta' + P''\delta y''\cos.\beta'' + P'''\delta y'''\cos.\beta''' + \text{ec.})$$

$$- \frac{y'}{\delta x'}(P'\delta x'\cos.\alpha' + P''\delta x''\cos.\alpha'' + P'''\delta x'''\cos.\alpha''' + \text{ec.})$$

$$+ \frac{x'+\xi}{\delta z'}(P'\delta z'\cos.\gamma' + P''\delta z''\cos.\gamma'' + P'''\delta z'''\cos.\gamma''' + \text{ec.})$$

$$- \frac{z'+\zeta}{\Delta x'}(P'\Delta x'\cos.\alpha' + P''\Delta x''\cos.\alpha'' + P'''\Delta x'''\cos.\alpha''' + \text{ec.})$$

$$+ \frac{y'+\mu}{\Delta z'}(P'\Delta z'\cos.\gamma' + P''\Delta z''\cos.\gamma'' + P'''\Delta z'''\cos.\gamma''' + \text{ec.})$$

$$- \frac{z'+\nu}{\Delta y'}(P'\Delta y'\cos.\beta' + P''\Delta y''\cos.\beta'' + P'''\Delta y'''\cos.\beta''' + \text{ec.})$$

$$+ s'P''\cos.\alpha'' - n'P''\cos.\beta''$$
$$+ s''P'''\cos.\alpha''' - n''P'''\cos.\beta'''$$
$$\text{ec.}$$

$$+ r'P''\cos.\alpha'' - m'P''\cos.\gamma''$$
$$+ r''P'''\cos.\alpha''' - m''P'''\cos.\gamma'''$$
$$\text{ec.}$$

$$+ t'P''\cos.\beta'' - q'P''\cos.\gamma''$$
$$+ t''P'''\cos.\beta''' - q''P'''\cos.\gamma'''$$
$$\text{ec.}$$

$$- \xi(P'\cos.\gamma' + P''\cos.\gamma'' + P'''\cos.\gamma''' + \text{ec.})$$
$$+ \zeta(P'\cos.\alpha' + P''\cos.\alpha'' + P'''\cos.\alpha''' + \text{ec.})$$
$$- \mu(P'\cos.\gamma' + P''\cos.\gamma'' + P'''\cos.\gamma''' + \text{ec.})$$
$$+ \nu(P'\cos.\beta' + P''\cos.\beta'' + P'''\cos.\beta''' + \text{ec.})$$

§. LXVII.

Ora si avverta che verificandosi le equazioni esprimenti l'equilibrio contenute nei §§. LVIII, LX, e LXII. le dieci ultime righe della somma (esposta nel §. precedente) di queste tre trasformate sono per se medesime $=0$. In fatti tutte quelle affette delle quantità ξ, ζ, μ, ν, sono l'equazioni (1), o (2) esposte in ciascheduno di quei tre paragrafi; e perciò svaniscono spontaneamente. Le altre sei righe sono la somma delle equazioni (4), e (5) parimente contenute in ciascheduno dei tre sopraccitati paragrafi, le quali equazioni sono ivi state poste separatamente, per maggior generalità; ma in ciaschedun caso, in cui dipendano una dall'altra, e perciò i respettivi punti del sistema abbiano qualche corrispondenza nei loro movimenti, si è esemplificato nel §. XLVI, e seguenti come nascono le equazioni necessarie a rappresentare quella precisa corrispondenza, e come il procedere, e la sostanza del metodo resti l'istessa.

§. LXVIII.

Ridotta adunque la somma delle tre trasformate alle sole sei prime righe, e considerando che quelle restano $=0$

non solo tutte insieme, ma ancòra separandole, come segue, a due a due, cioè le prime due insieme, la terza, e la quarta insieme, e la quinta, e la sesta insieme, in virtù delle equazioni (6), che sono in ciascheduno dei §§. LVIII, LX, e LXII, avremo

$$\frac{x'}{\delta y'} = -\frac{y'}{\delta x'}$$

$$\frac{x'+\xi}{\delta z'} = -\frac{z'+\zeta}{\Delta x'}$$

$$\frac{y'+\mu}{\Delta z'} = -\frac{z'+\nu}{\Delta y'}$$

onde quelle sei prime righe diventeranno

$$\begin{aligned}
0 = {} & P' \cos.\alpha' (\delta x' + \Delta x') + P'' \cos.\alpha'' (\delta x'' + \Delta x'') \\
& + P''' \cos.\alpha''' (\delta x''' + \Delta x''') + \text{ec.} \\
& + P' \cos.\beta' (\delta y' + \Delta y') + P'' \cos.\beta'' (\delta y'' + \Delta y'') \\
& + P''' \cos.\beta''' (\delta y''' + \Delta y''') + \text{ec.} \\
& + P' \cos.\gamma' (\delta z' + \Delta z') + P'' \cos.\gamma'' (\delta z'' + \Delta z'') \\
& + P''' \cos.\gamma''' (\delta z''' + \Delta z''') + \text{ec.}
\end{aligned}$$

§. LXIX.

Suppongasi adesso moltiplicata l' equazione (1) del §. LVIII. per la variazione, che possa essere seguita nel senso delle x per il moto progressivo comune di tutto il sistema, ed in oltre se li aggiungano tutte le equazioni parziali moltiplicate per le respettive parziali variazioni, occorse nel medesimo senso ai vari punti del sistema, e sia la somma di tali equazioni

$$P'\cos.\alpha' Dx' + P''\cos.\alpha'' Dx'' + P'''\cos.\alpha''' Dx''' + \text{ec.} = 0 .$$

In simil guisa operando nelle equazioni (2) del §. LX, e (1) del §. LXII, si avranno le somme delle equazioni appartenenti ai moti progressivi comuni, e delle equazioni appartenenti ai moti progressivi parziali, moltiplicate per le respettive variazioni comuni, e parziali, che saranno nel senso delle y

$$P'\cos.\beta' Dy' + P''\cos.\beta'' Dy'' + P'''\cos.\beta''' Dy''' + \text{ec.} = 0 ,$$

e nel senso delle z

$$P'\cos.\gamma' Dz' + P''\cos.\gamma'' Dz'' + P'''\cos.\gamma''' Dz''' + \text{ec.} = 0 .$$

§. LXX.

Sommando adesso queste tre equazioni con l'equazione del §. LXVIII, e supponendo

$$\delta x' + \Delta x' + Dx' = dx'$$
$$\delta x'' + \Delta x'' + Dx'' = dx''$$
$$\delta x''' + \Delta x''' + Dx''' = dx'''$$

ec.

$$\delta y' + \Delta y' + Dy' = dy'$$
$$\delta y'' + \Delta y'' + Dy'' = dy''$$
$$\delta y''' + \Delta y''' + Dy''' = dy'''$$

ec.

$$\delta z' + \Delta z' + Dz' = dz'$$
$$\delta z'' + \Delta z'' + Dz'' = dz''$$
$$\delta z''' + \Delta z''' + Dz''' = dz'''$$

ec.

avremo

$$\begin{aligned} o = & P' \cos. \alpha' dx' + P' \cos. \beta' dy' + P' \cos. \gamma' dz' \\ & + P'' \cos. \alpha'' dx'' + P'' \cos. \beta'' dy'' + P'' \cos. \gamma'' dz'' \\ & + P''' \cos. \alpha''' dx''' + P''' \cos. \beta''' dy''' + P''' \cos. \gamma''' dz''' \\ & + \text{ ec.} \end{aligned}$$

e quindi per le formole esposte fino dal principio al §. IV. della prima Parte, supponendo dp', dp'', dp''' ec. le variazioni totali, che per l'impulso impresso al sistema saranno occorse nelle direzioni delle forze applicate al primo, secondo, terzo ec. di tutti i punti, o corpi componenti il sistema medesimo, avremo finalmente $P'dp' + P''dp'' + P'''dp''' + \text{ec.} = o$, che è la richiesta equazione dei momenti.

§. LXXI.

Gioverà adesso per una specie d'epilogo, e per illustrazione ulteriore delle cose fino ad ora spiegate, il considerare l'origine dell' equazione dei momenti ancòra sotto un altro generale aspetto come segue. Allorchè un sistema è rigido, ciaschedun punto non può prendere altri movimenti che quelli, i quali sono comuni a tutto il sistema, in quanto che corrispondono all' ipotesi delle distanze invariabili. Ma in un sistema non rigido, nel quale cioè non tutti i punti, che lo compongono, debbano respettivamente mantenere la medesima distanza tra loro, oltre i moti comuni a tutto il sistema, vi saranno de' moti particolari, che potranno prendere quei punti, i quali non sono costretti a conservare invariabili le loro distanze. Perchè adunque un tal sistema sia in equilibrio, bisogna che siano in esso impediti non solo i moti comuni a tutto il sistema, ma ancòra i moti particolari, in modo che ciascun punto non possa accostarsi o allontanarsi dagli altri. Quindi in primo luogo, come nel caso dei corpi rigidi (§. LXXII, e LXXXI. Parte I.) avremo l'equazioni

$$(1)\quad (P'\cos.\alpha'+P''\cos.\alpha''+P'''\cos.\alpha'''+\text{ec.})\,Dx'$$
$$+\ (P'\cos.\beta'+P''\cos.\beta''+P'''\cos.\beta'''+\text{ec.})\,Dy'$$
$$+\,(P'\cos.\gamma'+P''\cos.\gamma''+P'''\cos.\gamma'''+\text{ec.})\,Dz'=0$$

$$(2)\quad P'\cos.\alpha'(\delta x'+\delta' x')+P''\cos.\alpha''(\delta x''+\delta' x'')+$$
$$P'''\cos.\alpha'''(\delta x'''+\delta' x''')+\text{ec.}$$
$$+\ P'\cos.\beta'(\delta y'+\delta' y')+P''\cos.\beta''(\delta y''+\delta' y'')+$$
$$P'''\cos.\beta'''(\delta y'''+\delta' y''')+\text{ec.}$$
$$+\ P'\cos.\gamma'(\delta z'+\delta' z')+P''\cos.\gamma''(\delta z''+\delta' z'')+$$
$$P'''\cos.\gamma'''(\delta z'''+\delta' z''')+\text{ec.}=0.$$

§. LXXII.

In secondo luogo converrà che sieno impediti i moti parziali, i quali o potranno essere progressivi, o rotatori intorno a tre assi qualunque tra loro normali. E quanto ai primi, se il punto, a cui per esempio è applicata la forza P', potrà muoversi di moto progressivo parziale ad esso, avremo per questo punto l'equazione

$$(a)\quad P'\cos.\alpha' D'x'+P'\cos.\beta' D'y'+P'\cos.\gamma' D'z'=0$$

ed un'altra simile per qualunque altro punto, che potesse avere una egual facoltà di muoversi indipendentemente dagli altri.

§. LXXIII.

Se i due punti, ai quali sono applicate per esempio le forze P', P'', debbano avere un moto progressivo comune, e nella medesima direzione, allora in luogo di due equazioni simili all'equazione (a) avremo la sola equazione

$$(b) \qquad \begin{aligned} 0 &= (P'\cos.\alpha' + P''\cos.\alpha'')\,D'x' \\ &+ (P'\cos.\beta' + P''\cos.\beta'')\,D'y' \\ &+ (P'\cos.\gamma' + P''\cos.\gamma'')\,D'z' \end{aligned}$$

§. LXXIV.

Che se i medesimi punti avranno un moto progressivo comune, ma il primo nella direzione s', ed il secondo nella direzione s'', chiamando $D's'$ lo spazietto percorso da ambedue i punti, avremo l'equazione

$$0 = P'\cos.\alpha'\frac{D'x'}{D's'} + P'\cos.\beta'\frac{D'y'}{D's'} + P'\cos.\gamma'\frac{D'z'}{D's'}$$

$$+ P''\cos.\alpha''\frac{D'x''}{D's'} + P''\cos.\beta''\frac{D'y''}{D's'} + P''\cos.\gamma''\frac{D'z''}{D's'}$$

e moltiplicando per $D's'$, otterremo

$$(c) \qquad \begin{aligned} 0 &= P'\cos.\alpha' D'x' + P'\cos.\beta' D'y' + P'\cos.\gamma' D'z' \\ &+ P''\cos.\alpha'' D'x'' + P''\cos.\beta'' D'y'' + P'\cos.\gamma'' D'z'' \end{aligned}$$

e così viene per i moti progressivi parziali ad illustrarsi un caso analogo a quello, che per i rotatori parimente parziali, ma comuni a due soltanto dei punti del sistema fu discusso al §. XLVI. e seguenti; dal che si manifesta il modo di procedere nei casi relativi ad un maggior numero di punti.

§. LXXV.

In qualunque caso pertanto si vede, che riunendo tutte l'equazioni che hanno luogo avremo sempre per impedire i moti progressivi parziali una equazione della forma

$$\begin{aligned} 0 &= P'\cos.\alpha' D'x' + P'\cos.\beta' D'y' + P'\cos.\gamma' D'z' \\ &+ P''\cos.\alpha'' D'x'' + P''\cos.\beta'' D'y'' + P''\cos.\gamma'' D'z'' \\ &+ \text{ec.} \end{aligned}$$

ove $D'x'$, per esempio, è la somma di tutte le variazioni, che competono al primo punto nel senso delle x in virtù di tutti i moti progressivi parziali, che questo punto può avere. E sommando questa con l'equazione (1) avremo

$$(3) \qquad \begin{aligned} 0 &= P'\cos.\alpha' Dx' + P'\cos.\beta' Dy' + P'\cos.\gamma' Dz' \\ &+ P''\cos.\alpha'' Dx'' + P''\cos.\beta'' Dy'' + P''\cos.\gamma'' Dz'' \\ &+ \text{ec.} \end{aligned}$$

ove bisogna avvertire di cangiare il significato di ciascheduna variazione in modo, che per esempio Dx' comprenderà il moto progressivo nel senso delle x comune a tutto il sistema, ed i moti progressivi parziali nel medesimo senso appartenenti al primo punto; e così delle altre: e questa equazione avrà luogo in qualunque sistema, e in vigore di essa sarà impedito qualunque moto progressivo.

§. LXXVI.

Passando ai moti rotatori parziali ponghiamo, che il punto, a cui è applicata per esempio la forza P', possa independentemente dagli altri punti girare intorno ad un centro, al quale sia referito per mezzo delle coordinate $x' \pm m, y' \pm n, z' \pm p$. Avremo per impedire questa rotazione le tre equazioni

$$P' \cos.\alpha' (y' \pm n) - P' \cos.\beta' (x' \pm m) = 0$$

$$P' \cos.\alpha' (z' \pm p) - P' \cos.\gamma' (x' \pm m) = 0$$

$$P' \cos.\beta' (z' \pm p) - P' \cos.\gamma' (y' \pm n) = 0.$$

Ora se chiamiamo $\upsilon x', \upsilon y', \upsilon z', \upsilon' x', \upsilon' y', \upsilon' z'$ gli spazietti in vigor di un tal moto percorsi nel senso delle x, y, z, è chiaro che tra $\upsilon x', \upsilon y'$, ec. e $x' \pm m, y' \pm n, z' \pm p$ esisteranno dei rapporti, analoghi a quelli che sopra per i sistemi rigidi abbiamo veduto esistere tra $\delta x', \delta y'$, ec. e le coordinate x', y', ec. e quindi dopo avere per mezzo di tali rapporti sostituito nelle equazioni precedenti le variazioni in vece delle coordinate, la somma di quelle trasformate ci somministrerà l'equazione

$$(d) \quad P' \cos.\alpha' (vx' + v'x') + P' \cos.\beta' (vy' + v'y') + P' \cos.\gamma' (vz' + v'z') = 0$$

ed un'altra simile equazione per qualunque altro punto si concepisse poter girare egualmente.

§. LXXVII.

Se due punti qualunque, e per esempio quelli, ai quali sono applicate le forze P', P'', potranno ruotarsi intorno ad un medesimo centro, mantenendo tra loro la stessa distanza, in tal caso avremo le tre equazioni

$$0 = P' \cos.\alpha' (y' \pm n) - P' \cos.\beta' (x' \pm m) + P'' \cos.\alpha'' (y'' \pm n) - P'' \cos.\beta'' (x'' \pm m)$$

$$0 = P' \cos.\alpha' (z' \pm p) - P' \cos.\gamma' (x' \pm m) + P'' \cos.\alpha'' (z'' \pm p) - P' \cos.\gamma'' (x'' \pm m)$$

$$0 = P' \cos.\beta' (z' \pm p) - P' \cos.\gamma' (y' \pm n) + P'' \cos.\beta'' (z'' \pm p) - P'' \cos.\gamma'' (y'' \pm n)$$

e col medesimo raziocinio occorso per un punto solo, ne dedurremo l'unica equazione

$$(e) \quad 0 = P' \cos.\alpha' (vx' + v'x') + P'' \cos.\alpha'' (vx'' + v'x'') + P' \cos.\beta' (vy' + v'y') + P'' \cos.\beta'' (vy'' + v'y'') + P' \cos.\gamma' (vz' + v'z') + P'' \cos.\gamma'' (vz'' + v'z'')$$

§. LXXVIII.

Tutte queste equazioni, ed altre simili, che appartengono ai moti parziali di rotazione, sono adunque della medesima forma, che l'equazione (2). Quindi questa equazione (2) conterrà tutte le condizioni necessarie, acciò che sieno impediti i moti di rotazione, tanto comuni, quanto parziali di tutto il sistema; purchè s'intenda cangiato in guisa il significato di tutte le variazioni in essa esistenti, che, per esempio, la variazione $\delta x' + \delta' x'$ esprima la somma di tutti gli spazietti percorsi nel senso delle x dal primo punto del sistema in virtù di tutte le rotazioni, delle quali esso è suscettibile; e l'istesso dicasi delle altre.

§. LXXIX.

E' chiaro pertanto, che sommando tale equazione (2), in cui le variazioni abbiano il significato quì sopra espresso, con l'equazione (3) del §. LXXV. avremo l'equazione dei momenti, che adunque resterà generalmente dimostrato aver luogo nell'equilibrio di qualunque sistema a distanze costanti, o variabili.

§. LXXX.

Questa maniera d'intraprendere la ricerca delle condizioni dell'equilibrio in un sistema qualunque, oltre al porre sotto occhio, come nel corso della presente Memoria si è veduto, la necessità dell'equazione dei momenti, può spargere un gran lume sopra molte questioni Meccaniche della più difficile indagine, e che fino ad ora sono state appoggiate a qualche ipotesi.

§. LXXXI.

Tali, per esempio, sono alcune, ove si cercano le condizioni della stabilità dei solidi sostenuti da altri solidi, e specialmente degli archi, materia quanto comune nella pratica, altrettanto indocile ad assoggettarsi ad una rigorosa teorìa, e che si vedrà cosa resulti ricercando le condizioni di ognuno dei punti gravitanti, considerati come a distanze invariabili tra loro, quei punti, che costituiscono ciascheduno dei solidi, i quali compongono l'arco in questione, e seguendo le vedute esposte al §. XLVI, e seguenti, non più separando un punto dall'altro, ma impiegando l'integrale dell'elemento di ciascheduno dei solidi sopraddetti, e secondo le originali, e luminose tracce già scoperte dal Signor La Grange.

§. LXXXII.

All' istesso genere di ricerca potrà appartenere la Dottrina dei semifluidi, giacchè ogni finita, e sensibile particella componente di essi, potrà considerarsi come resultante di punti a distanze invariabili tra loro; e finalmente l'Idrostatica ancòra sarà con vantaggio riguardata sotto questo aspetto.

§. LXXXIII.

In fatti il Signor D'Alembert ha dedotto le condizioni dell'equilibrio dei fluidi dal Principio esperimentale dell'eguaglianza di pressione in ogni senso, ed il Signor La Grange il primo ha fatto vedere, che per mezzo del Principio delle Velocità Virtuali si aveva il vantaggio di stabilire una rigorosa teorìa dei fluidi, prescindendo dal sopracitato principio d'esperienza. E senza fermarsi adesso a dimostrare, come un tal vantaggio possa ottenersi ancòra facendo conto delle equazioni condizionali da noi ritrovate, ci limiteremo ad osservare, che inerendo alle cose dimostrate al §. XLVI, e seguenti, si ricava indi direttamente, che l'eguaglianza di pressione nei fluidi suppone i componenti di essi perfettamente sciolti, altrimenti caderebbero nella eccezione, che si manifesta nei sopraindicati semifluidi. Nè vale che l'esperienze fino ad ora istituite mostrino l'eguaglianza di pressione nell'acqua per ammettere la fluidità continua; perchè potrebbero le ineguaglianze di pressione esistere, ma essere così tenui da sfuggire ai nostri sensi, e questo è più facile a concepirsi, di quello che sia un fluido composto di punti affatto sciolti, e indivisibili.

FINE

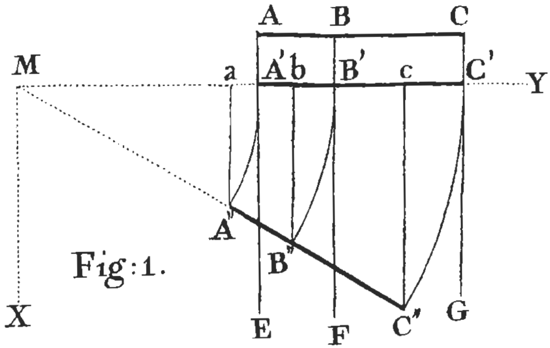

Fig:1.

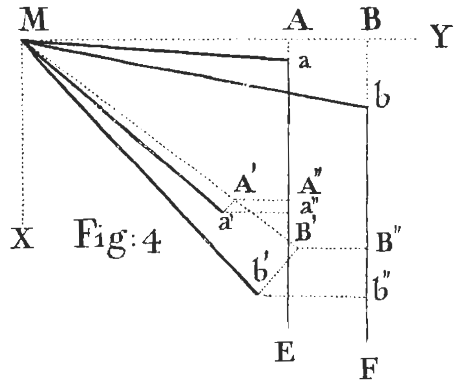

Fig:4

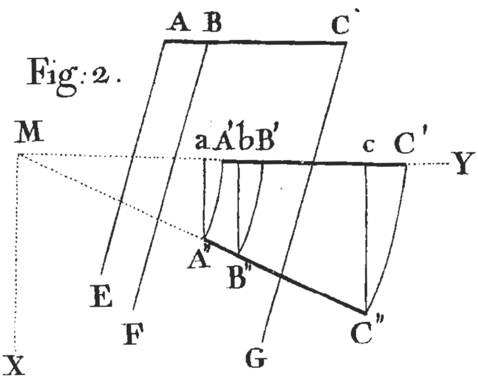

Fig:2.

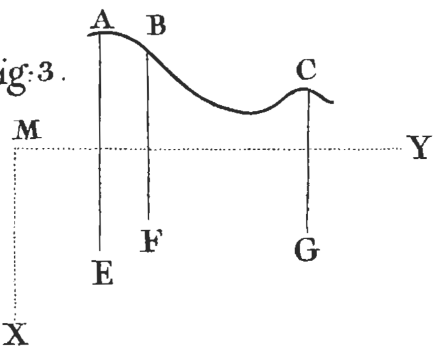

Fig:3.

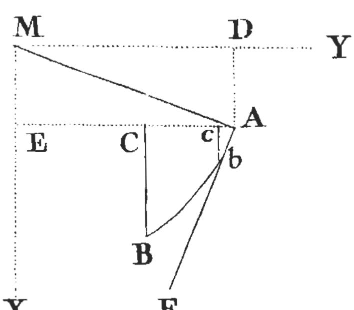

Fig:5.

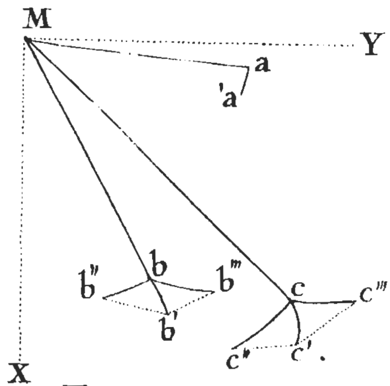

Fig:6.

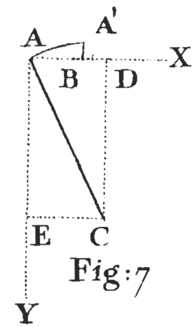

Fig:7