

El cálculo de estructuras en la obra de Gaudí

SANTIAGO HUERTA (*)

RESUMEN La obra de Gaudí integra todos los aspectos del proyecto de arquitectura. En el presente artículo se estudia el análisis y proyecto de arcos y bóvedas de fábrica. Es bien conocido que Gaudí empleó modelos colgantes y también métodos de estática gráfica. Estos métodos no son originales y se remontan a finales del siglo XVII. Tampoco es original el empleo en el proyecto de formas equilibradas (catenarias). Lo que es completamente original y supuso en «giro copernicano» es plantear todo el proyecto, desde el comienzo, buscando formas equilibradas. Por otra parte, Gaudí emplea bóvedas de formas inusuales, compuestas de superficies regladas, mostrando una gran intuición estructural. Finalmente, en la Sagrada Familia busca esqueletos arbóreos de equilibrio. En el presente artículo se estudian en detalle el origen y naturaleza de los métodos de equilibrio de Gaudí, resaltando su validez basada, en última instancia, en los Teoremas Fundamentales del Análisis Límite.

ABSTRACT *The work of Gaudí embraces all the facets of architectural design. The present paper studies the analysis and design of masonry arches and vaults. It is well known that Gaudí used hanging models and graphics methods as design tools. These methods can be traced back to the end of the XVIIIth century. Also, it was not original the use of equilibrated, catenarian, forms. What was completely original was the idea of basing all the structural design in considerations of equilibrium. Gaudí, also, employed unusual geometrical forms for some of his vaults, ruled surfaces, showing a deep structural insight. Finally, he designed tree-forms of equilibrium for the supports of the vaults in the Sagrada Familia. In the present paper Gaudí's equilibrium methods are studied with some detail, stressing their validity within the frame of Limit Analysis.*

Palabras clave: Antoni Gaudí; Arcos; Bóvedas; Catenaria; Modelos colgantes; Estática gráfica; Estructuras de fábrica; Enfoque del equilibrio; Historia de la construcción; Análisis límite.

INTRODUCCIÓN

Gaudí fue un maestro de la construcción. Su obra comprende todos los aspectos del proyecto de arquitectura: la distribución, la ornamentación, la estabilidad. También integra otras artes: la escultura (en particular), la pintura, la fotografía. Cualquier estudio sobre la obra de Gaudí debe tener presente esta concepción global del proyecto. El presente artículo considera sólo uno de los aspectos de la actividad de Gaudí: el del proyecto y cálculo de estructuras. Para Gaudí el cálculo de estructuras formaba parte del proceso de proyecto desde sus etapas iniciales. No se reducía, como era el caso habitual entonces, a una mera comprobación de estabilidad. Pasaremos revista a los distintos elementos estructurales estudiando el detalle del proceso de proyecto y cálculo de Gaudí y tratando de situar su actividad en un contexto histórico.

ARCOS CATENARIOS

Desde las primeras obras Gaudí mostró su originalidad e independencia. En particular empezó a emplear de manera sistemática un tipo de arcos nada habitual dentro de la tradición arquitectónica occidental. En vez de emplear arcos de

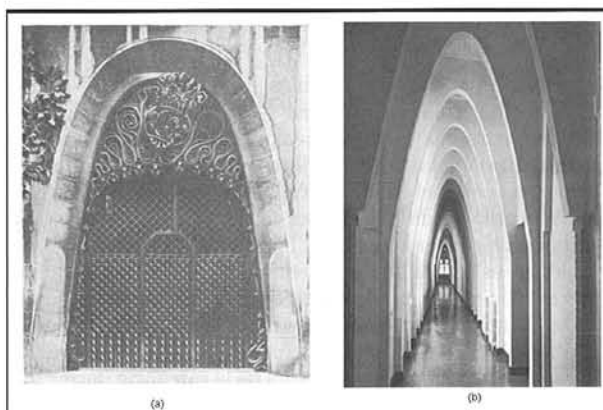


FIGURA 1. Arcos catenarios: a) entrada del Palacio Güell (Rafols 1929); b) pasillo del colegio de las Teresianas (Tarragó 1991).

formas derivadas del círculo (de medio punto, apuntados, carpaneles, etc.) utilizó arcos de formas no-circulares: parabólicos o «catenarios». Estos arcos están presentes ya en las primeras obras de Gaudí, Figuras 1 y 2.

El empleo de estas formas tiene un origen mecánico y se remonta a finales del siglo XVII. Hacia 1670 Robert Hooke plantea el siguiente problema en una de las reuniones de la

(*) Dr. Arquitecto. Profesor titular. Dpto. de Estructuras. ETS de Arquitectura. Universidad Politécnica de Madrid.

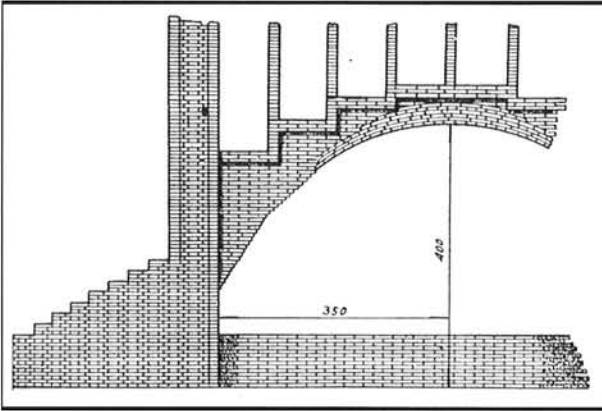


FIGURA 2. Arco antifunicular en la fuente cascada de la casa Vicens (Bergós 1953).

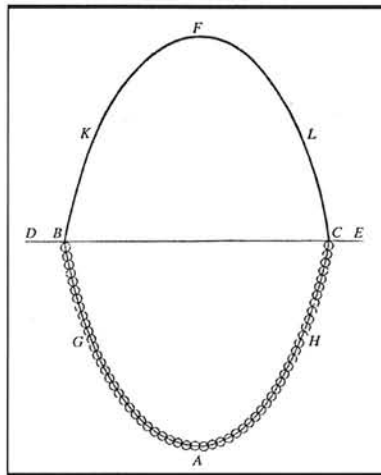


FIGURA 3. Idea de Hooke sobre la analogía entre arco y catenaria (dibujo Poleni 1748).

Royal Society (de la que también formaban parte Newton, Wren, Boyle): Cuál es la forma ideal de un arco y cuánto empuja contra sus estribos. Hooke (1676) da la solución en un anagrama incluido en un libro sobre relojes: “Del mismo modo que cuelga el hilo flexible, así, pero invertido, se sostendrá el arco rígido” (Ut pendet continuum flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum), Figura 3.

La idea es entender el funcionamiento de los arcos por analogía con los cables colgantes: en efecto el problema de equilibrio es idéntico. Se trata de una de las ideas más geniales de la historia del cálculo de estructuras. Poco después Gregory (1697) en un artículo sobre la forma de la catenaria (forma que toma una cadena colgante): no resuelve el problema (lo haría Bernoulli en 1704; véase Benvenuto 1991), pero matiza la afirmación de Hooke: la forma ideal de un arco es la de una catenaria invertida y “si arcos de otras formas se sostienen es porque hay una catenaria en su interior”. Hay que señalar que la catenaria simple no es una parábola (en realidad tiene la forma del coseno hiperbólico). Se trata de un enunciado precoz (y sin demostración) del Teorema de la Seguridad al que aludiremos más adelante. La idea de Hooke permitía de forma directa el empleo de sencillos modelos colgantes para proyectar y calcular, por ejemplo, los arcos de los puentes. Algunos ingenieros ingleses del siglo XVIII la llevaron a la práctica y Young (1807, 1845) la recoge y explica en sus *Lectures on natural philosophy and the mechanical arts*, Figura 4.

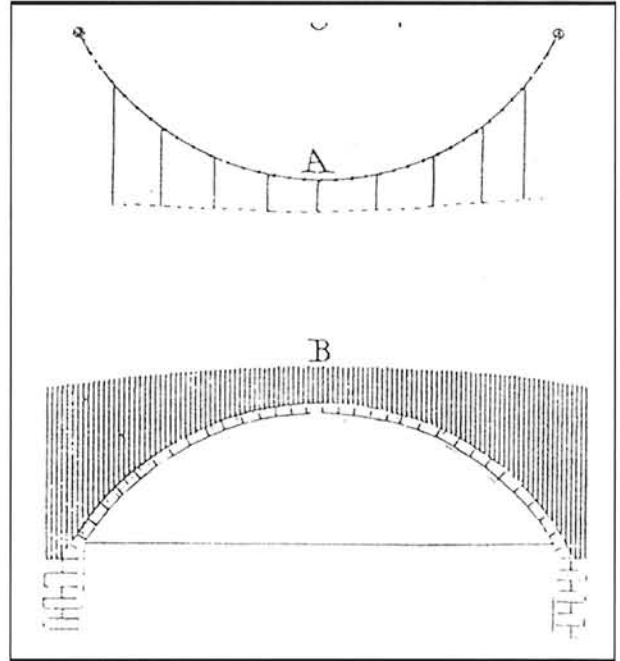


FIGURA 4. Cálculo de un puente empleando un modelo colgante. (Young 1845; 1a.ed. 1807).

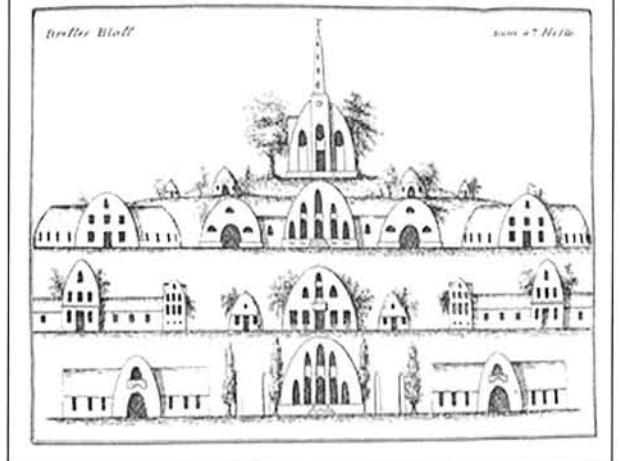
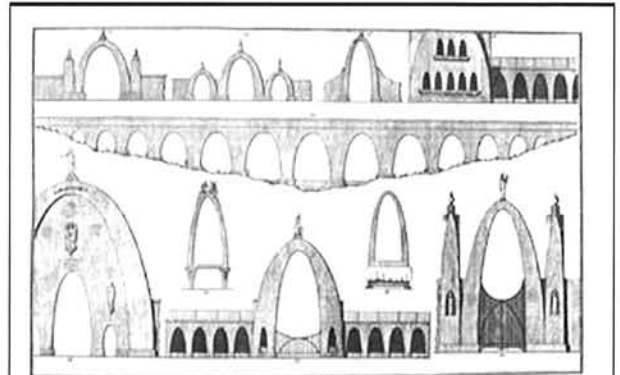


FIGURA 5. Propuesta de una arquitectura de formas catenarias. (Tappe 1818-21).

El enfoque no tuvo tanta difusión en la Europa continental, pero se siguió mencionando en algunos de los tratados franceses del siglo XVIII (por ejemplo, Bélidor 1729; Frézier 1737). En Alemania, ya en el siglo XIX, Hübsch investiga sobre esta idea y emplea modelos colgantes para calcular los estribos de una iglesia (Graefe 1985). Wilhelm Tappe (1818) publica en la misma época un libro en el que propone una arquitectura de formas catenarias, que no llegó a ejecutar, Figura 5 (citado en Otto 1983, Graefe 1985).

Hacia 1840 se formula la teoría de las líneas de empujes (Moseley 1835, 1837; Méry 1840), que da rigor al enfoque intuitivo-experimental de los ingenieros ingleses y que unifica la teoría al correlacionar líneas de empujes y mecanismos de colapso. Ahora se pueden calcular y dibujar líneas de empujes sin necesidad de emplear modelos, utilizando el análisis matemático o métodos gráficos. Uno de los primeros análisis gráficos se puede ver en la Figura 6 en la que se realiza sobre el dibujo la descomposición de fuerzas. A la derecha se ha añadido el polígono de fuerzas correspondiente. El empleo de polígonos de fuerzas separados de los funiculares es mucho más cómodo y se generalizó en el último cuarto del siglo XIX.

La estática gráfica, el intento de calcular estructuras con métodos principalmente gráficos, fue propuesta por Culmann en su libro *Graphische Statik* de 1866, si bien la teoría que sustenta los métodos gráficos fue expuesta antes por Rankine (1858) y Maxwell (1864). Los tratados de estática gráfica (en realidad la traducción correcta de "graphische Statik" sería "cálculo gráfico") tienen una enorme difusión a partir de 1870.

Esta es la formación que debió recibir Gaudí en sus años de estudiante (1873-1878): alguna mención a la analogía con los cables (y posiblemente al empleo de modelos) y, con seguridad, clases sobre cálculo gráfico de arcos y, quizá, de bóvedas.

Gaudí utiliza la idea de los arcos catenarios para integrar el cálculo de estructuras en el proceso del proyecto. No se trata de verificar la estabilidad de un cierto diseño; se trata de proyectar, desde el principio, con formas estables. Por lo que sabemos es la primera vez que se realiza este intento y se lleva, como se verá, hasta sus últimas consecuencias.

El problema práctico no es el de la catenaria uniforme, el de un arco que se soporta a sí mismo: el problema es hallar la forma de un arco que resiste una cierta carga definida por dos líneas (superficies) de intradós y trasdós. El trasdós es

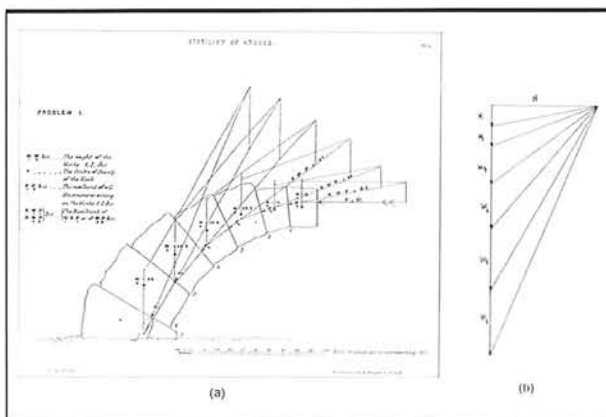


FIGURA 6. Línea de empujes de un arco simétrico: (a) Dibujo gráfico realizando la composición de fuerzas sobre el dibujo (Snell 1846); (b) Polígono de fuerzas correspondiente (añadido por el autor).

un dato de partida y las cargas vienen definidas por la distancia vertical entre el trasdós y la curva de intradós que debe adoptar una forma equilibrada (Rankine llamó a esta curva "catenaria transformada" y así la denominaremos en lo que sigue). En la práctica, es el caso de un puente, o de un arco sobre una puerta, o formando parte de una arcada, o soportando un cierto forjado o bóveda. La solución matemática exacta para este problema había sido ya estudiada: para puentes por Yvon Villarceau (1853) y de una manera completamente general, para cualquier carga, por Rankine (1858).

El problema más corriente consiste en encontrar la forma de un cable (o arco) que soporta un peso proporcional a la distancia vertical entre su directriz y una cierta línea horizontal. No es un problema directo y su resolución matemática reviste una cierta complejidad. La forma del arco depende de la relación luz/flecha y del espesor en la clave. En la Figura 7 puede verse la ecuación de esta curva para el caso de un arco con trasdós horizontal (Inglis 1951). Para espesor cero (un caso irreal) sale una forma poco habitual; para poco espesor la forma se parece mucho a la de la puerta del palacio Güell (Fig.1a). Para espesores del orden de la luz el arco se hace parabólico. Es decir, cuando el arco soporta una carga uniforme mayor que su propio peso (por ejemplo un arco que soporta un forjado), la forma de la catenaria transformada es, muy aproximadamente, una parábola.

En consecuencia, el empleo de arcos parabólicos en el colegio de las Teresianas (Fig. 1b), está, en base a la exposición anterior, mecánicamente justificado. No obstante resulta evidente que arcos de otras formas, con su trasdós relleno con un muro consistente podrían contener las parábolas o catenarias correspondientes (la afirmación de Gregory más arriba) y Gaudí lo sabía, como lo prueba el empleo de un arco catenario simétrico para sustentar una carga asimétrica,

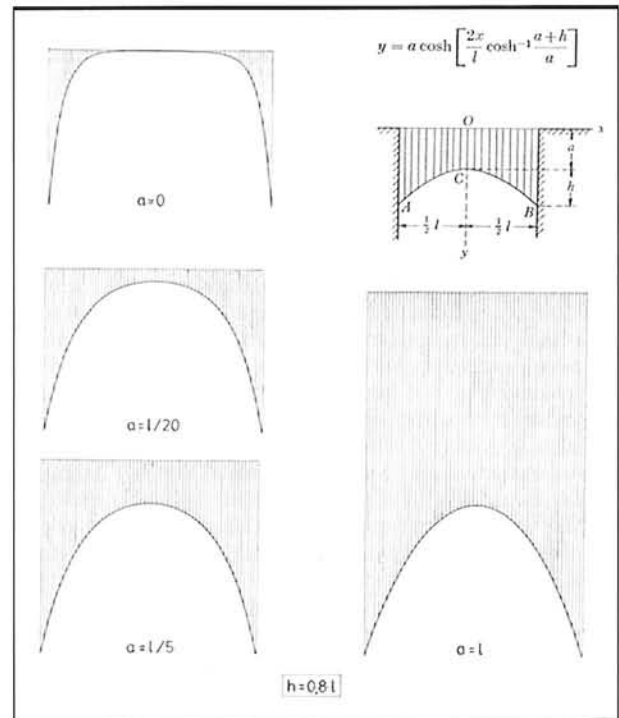


FIGURA 7. Arcos con forma de catenaria transformada. Ecuación matemática (Inglis 1951) y parámetros principales de proyecto (dibujo del autor).

una forma muy aproximada a la matemática exacta. Este proceso iterativo se puede realizar también empleando la estática gráfica y algunos de los croquis correspondientes fueron publicados por Puig Boada (1976) y Tomlow (1989), Figura 11.

Cuando no todas las cargas son verticales, los métodos gráficos pueden resultar más convenientes. De hecho, Gaudí los empleó en el proyecto de los pórticos y muros de contención del Parque Güell. En el dibujo, publicado por Rubiò Bellver (1913), puede apreciarse el empleo de un método similar al de la Figura 6, en el que se realiza la composición de fuerzas sobre el propio dibujo, en vez de dibujar aparte el polígono de fuerzas, que era la práctica habitual. Gaudí debió usarlo con frecuencia (según Rubiò lo usaba ya antes de 1880) pues aparece en otros dibujos, por ejemplo, en el cálculo de la fachada poniente de la Sagrada Familia, Figura 13. El método fue empleado por el propio Rubiò Bellver (1912) en su análisis mecánico de la catedral de Palma de Mallorca. Posiblemente su origen está en los manuales de Planat (1887 y 1906) que tuvieron gran difusión en España, Figura 14. El dibujo se complica pero se tiene la ventaja de tener todos los elementos a la vista en el mismo diagrama.

Gaudí no tenía preferencias por uno u otro método. Hay un deseo evidente de investigar y considerar el problema desde distintos puntos de vista. El empleo combinado de métodos gráficos y modelos le permitió a Gaudí obtener una comprensión profunda de los problemas de estabilidad y forma de arcos de fábrica. Su utilización parece haber sido sistemática. Así, le dice a Martinell (1969): "lo calculo todo".

BÓVEDAS Y EDIFICIOS. MODELOS COLGANTES

El proyecto y cálculo de arcos (o bóvedas de cañón) es un problema que se resuelve en un plano de dos dimensiones. Una bóveda es un problema espacial, de tres dimensiones. Tras sus investigaciones sobre el proyecto de arcos Gaudí se plantea el problema más general de proyectar bóvedas y, finalmente, edificios completos con formas equilibradas.

La estática gráfica permitió abordar el análisis de bóvedas de formas ya proyectadas. Desde el decenio de 1870 se analizan bóvedas mediante su división en arcos simples (véase, por ejemplo, Wittmann 1879). Así, para estudiar el comportamiento de una bóveda de crucería imaginamos cada uno de los plementos como "dividido" o "cortado" en una serie de arcos elementales. Estos arcos apoyan sobre los arcos cruceros que transmiten las cargas hacia los arranques, Figura 14 y 18. De esta manera se obtiene una solución posible de equilibrio, de entre las infinitas que pueden existir en una estructura hiperestática.

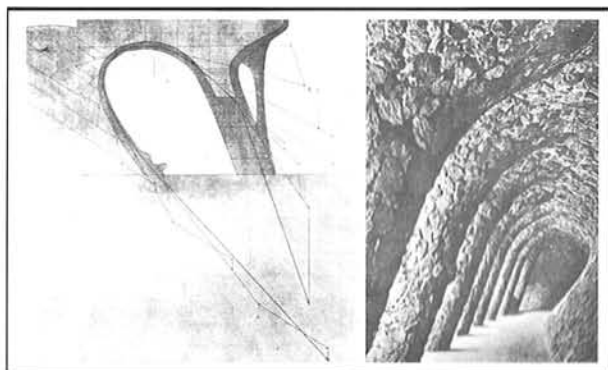


FIGURA 12. Muro de contención del Parque Güell: a) cálculo gráfico de Gaudí (Rubiò Bellver 1912); b) foto del mismo muro (Iarragó 1991).

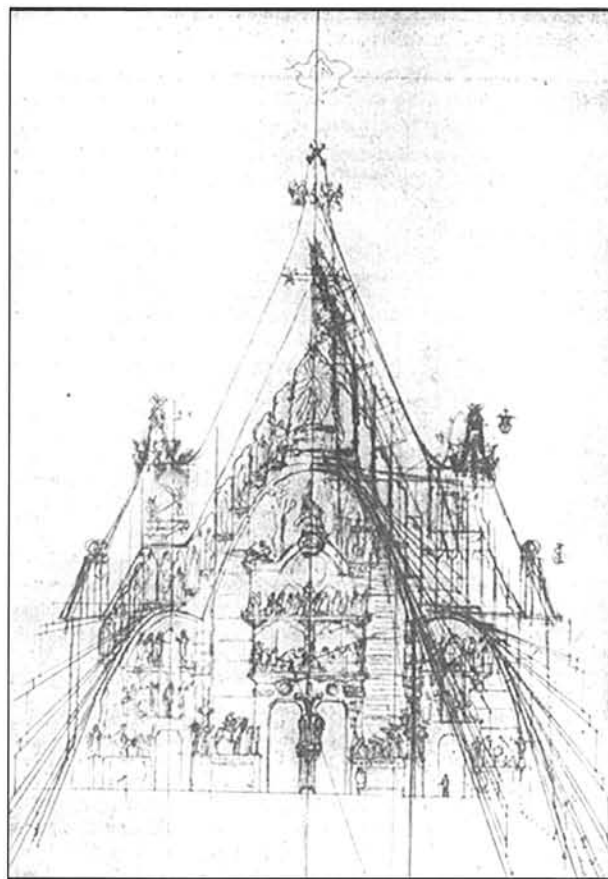


FIGURA 13. Cálculo gráfico Gaudí para la fachada poniente de la Sagrada Familia. (Rafols 1929).

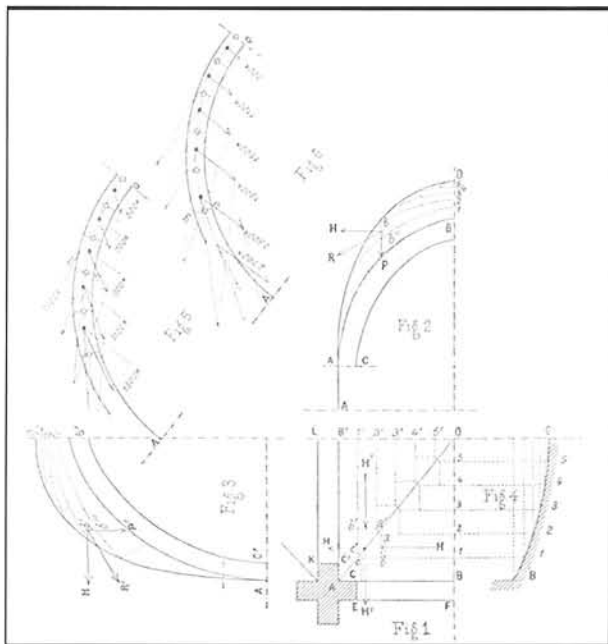


FIGURA 14. Cálculo gráfico de los arcos cruceros de una bóveda gótica. La bóveda se "divide" en arcos elementales, que apoyan sobre los cruceros. Nótese la composición de fuerzas sobre el mismo dibujo. (Planat 1887).

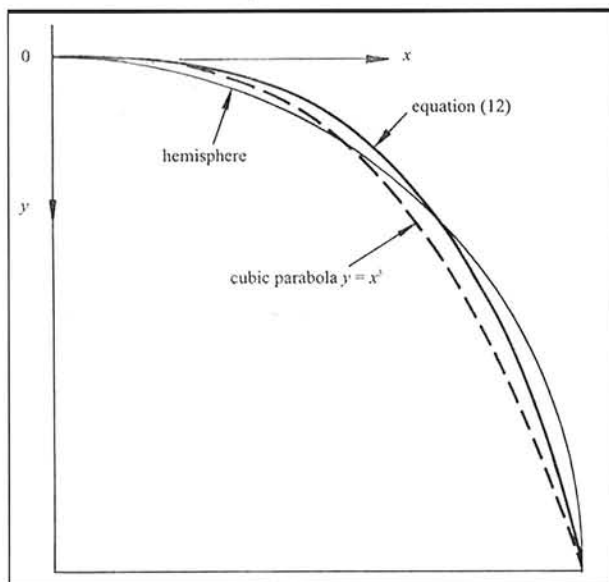


FIGURA 15. Perfil ideal de una cúpula. Comparación entre la solución correcta (equation 12), la forma semiesférica y la parábola cúbica de Hooke. (Heyman 1998).

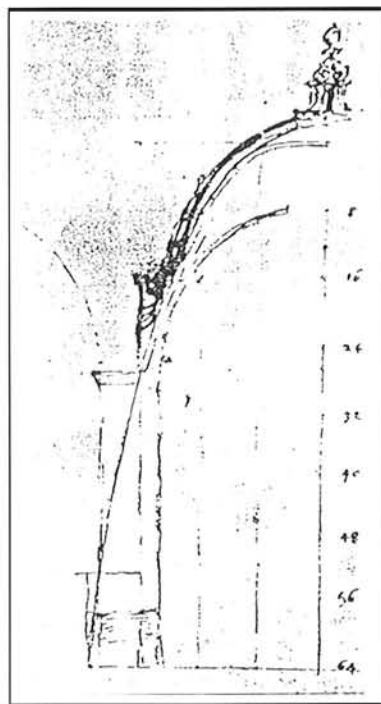


FIGURA 16. Empleo de la parábola cúbica de Hooke en uno de los diseños de Wren para la cúpula de San Pedro. Las líneas verticales que marcan las ordenadas están separadas una unidad y resulta fácil comprobar el ajuste de la curva de la cúpula intermedia a la parábola cúbica. (dibujo en Graefe 1986).

Esta idea de imaginar bóvedas espaciales como la suma de una serie de arcos obtenidos “cortando” la estructura por una serie de planos, debió ser aplicada por primera vez en el último cuarto del siglo XVII por Robert Hooke durante su colaboración con Wren en el proyecto de la cúpula de San Pedro. Como en el caso del arco catenario, no fue capaz de hallar la expresión matemática correcta, pero algunos de los diseños previos sobre la cúpula muestran el empleo de formas catenarias cupuliformes (la catenaria simple difiere sustancialmente de la superficie catenaria de una cúpula). Hoo-

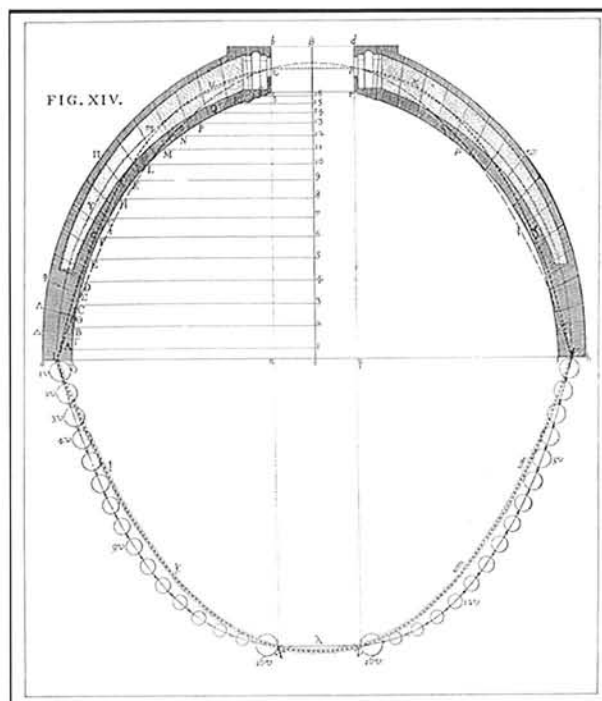


FIGURA 17. Modelo colgante de Poleni para demostrar la estabilidad de la cúpula de San Pedro de Roma. (Poleni 1748).

ke llegó a afirmar que el perfil ideal para una cúpula es el de una parábola cúbica, que se aproxima bastante a la solución correcta como puede verse en la Figura 15 (Heyman 1998). El profesor Heyman ha encontrado la evidencia de la aplicación de la parábola cúbica de Hooke en uno de los diseños de Wren (Heyman 2003). En la Figura 16 puede verse la catenaria dibujada y las ordenadas y abscisas demuestran que se trata de una parábola cúbica; este hecho crucial había pasado desapercibido hasta ahora (Graefe 1986, publica el dibujo pero no lo menciona). Los dibujos de catenarias en los diseños de Wren sólo fueron publicados en la segunda mitad del siglo XX, y no ejercieron ninguna influencia posterior.

El método de los cortes fue sugerido por primera vez en una publicación por Frézier (1737), en el capítulo de bóvedas de su tratado de esteorotomía, y fue aplicado por primera vez al análisis de la estabilidad de la cúpula de San Pedro por Poleni (1748). Poleni imaginó la cúpula cortada en cincuenta gajos: cada dos gajos opuestos formaban un arco; si era posible encontrar una “catenaria” en su interior cada arco se sostendría y, por ende, la cúpula. Poleni, sin duda consciente de la dificultad del análisis matemático, obtuvo la curva empleando un modelo colgante, Figura 17. A finales del siglo XVIII, Soufflot y Rondelet parecen haber manejado formas catenarias en algunos diseños para el Panteón de París. Tomlow (1993) ha demostrado el empleo de esta técnica en el proyecto de una cúpula en 1837. Poco más se encuentra en la literatura; el genial análisis de Poleni pasó desapercibido.

Los análisis matemáticos sobre formas equilibradas de cúpulas se inician en el siglo XVIII: Bouguer (1734) halla la expresión matemática que Hooke buscaba y expone, por primera vez, lo que hoy día llamaríamos enfoque o teoría “de la membrana”. Durante finales del siglo XVIII y principios del XIX algunos ingenieros desarrollan una teoría matemática de cúpulas que no tuvo ninguna aplicación práctica (véase, por ejemplo, Bérard 1810).

Gaudí pudo haber tenido noticia del análisis de Poleni. En cuanto a otros tipos de bóvedas, debió conocer algunos de los primeros análisis gráficos de bóvedas de los años 1870, que se difundieron con enorme velocidad por toda Europa: por primera vez existía un método de cálculo asequible y fiable para verificar la estabilidad de estructuras existentes o proyectos nuevos, y la mención de Rubió Bellver (1913) sobre el interés de Gaudí por la estática gráfica es explícita. Hacia 1900 los trabajos de Mohrmann sobre la estructura gótica (Ungewitter/Mohrmann 1890) y Koerner (1901) sobre bóvedas en general, por citar dos libros que tuvieron gran difusión, suministraban un análisis de las formas de bóvedas más usuales.

Pero Gaudí no quería aplicar el método tradicional: se proyecta primero la bóveda, asignándole cierta forma y dimensiones (en el estilo que se considere más adecuado, neo-gótico, neo-bizantino, Renacimiento, etc.) y, después, se comprueba su estabilidad por métodos gráficos. Gaudí quería, como en el caso de los arcos, aplicar un método de proyecto que condujera directamente a formas equilibradas. La estática gráfica, como se ha dicho, permite trabajar cómodamente en dos dimensiones (el plano del papel). Para fijar la posición de una recta en el espacio hacen falta tres proyecciones y esto hace que los problemas espaciales sean muy laboriosos de resolver.

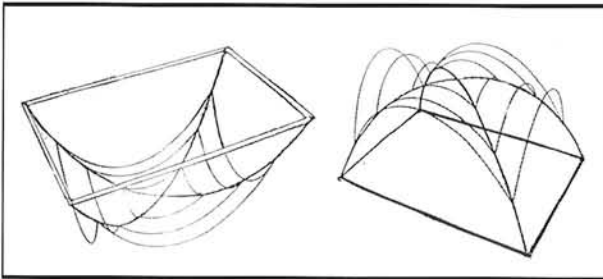


FIGURA 18. Modelo colgante de una bóveda de crucería. (Beranek 1988).

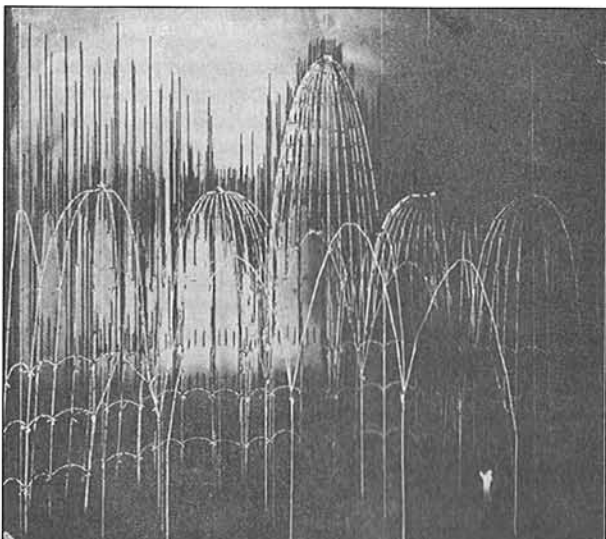


FIGURA 19. Modelo colgante preliminar de Gaudí para la iglesia de la Colonia Güell. (Rafols 1929).

Gaudí se dio cuenta enseguida de que en el caso más general el único camino posible era el empleo de modelos colgantes espaciales. La idea es, probablemente, original de Gaudí. A diferencia de los modelos colgantes para arcos en la literatura de la segunda mitad del siglo XIX sólo aparece una mención al empleo de modelos colgantes para estudiar el comportamiento estructural de las bóvedas. Mohrmann en sus adiciones al tratado de construcción gótica de Ungewitter (1890), sugiere el empleo de modelos colgantes espaciales ("Seilnetz") para estudiar el funcionamiento de las bóvedas góticas (citado por Graefe 1986).

Un modelo colgante espacial es una aplicación implícita del mencionado método de los cortes. Así, el modelo colgante de una bóveda de crucería es el de la Figura 18, donde cada arco simple sostiene una parte de la plementería.

El modelo de la Figura 18 es doblemente simétrico. Gaudí se plantea el problema de bóvedas completamente asimétricas, sobre soportes también irregulares. Sin solución de continuidad salta del problema de la bóveda al del proyecto de un edificio. Su investigación se produjo en el contexto de los trabajos de proyecto y construcción de la iglesia de la colonia Güell que duraron dieciocho años (diez de proyecto y ocho de construcción de la cripta; la iglesia no se terminó). Pocas veces en la historia de las estructuras se ha dedicado tanto tiempo, esfuerzo e ingenio a investigar una idea.

Como en el caso de las catenarias transformadas, el problema no tiene solución directa y es preciso realizar iteraciones. Primero se crea el esqueleto principal, Figura 19, donde los cables principales representan las principales trayectorias de empujes. Este primer modelo toma una forma. En base a esta configuración se calculan las superficies y pesos y de los elementos y se carga el modelo mediante pequeños saquitos de arena (Fig. 20), que

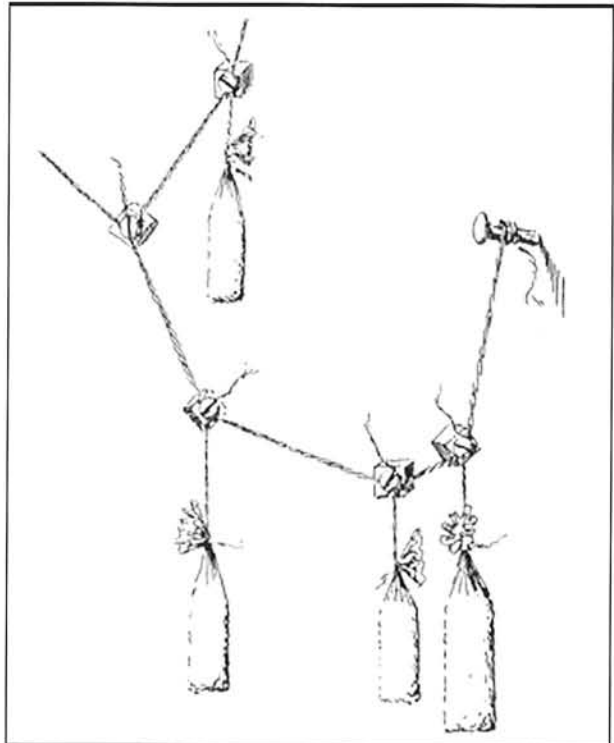


FIGURA 20. Método para aplicar las cargas al modelo colgante. (Rubió Bellver 1913).

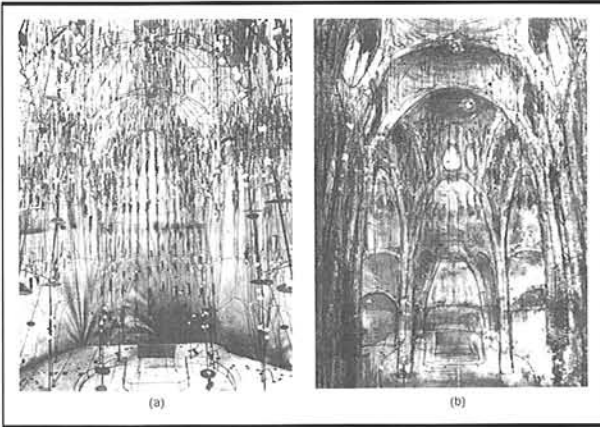


FIGURA 21. (a) Foto del modelo colgante tras ser cargado con los saquitos de arena. (b) Dibujo al gouache sobre la foto anterior para ver el espacio interior. (Puig Boada 1976).

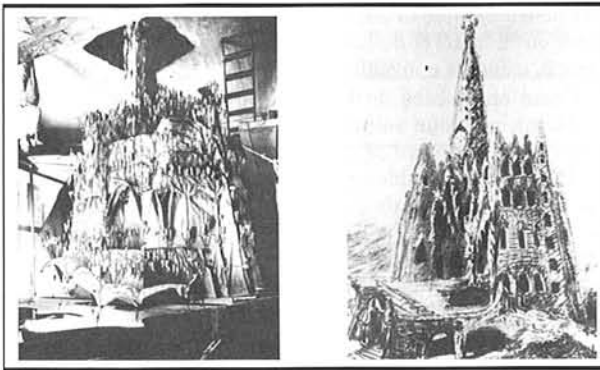


FIGURA 22. Foto del modelo completo revestido de lana y dibujo sobre la misma foto. (Puig Boada 1976).

modifican su forma. Se recalculan los pesos y se ajustan las cargas en el modelo a los nuevos valores. El modelo adopta ahora una figura muy aproximada a la de equilibrio, Figura 21 (a). Se observa la forma obtenida, que se puede modificar variando la geometría y/o las cargas. Para “dar volumen” al modelo Gaudí ensayó varios métodos. Uno de ellos consistía en tomar una fotografía y, luego, dibujar con gouache sobre ella como en la Figura 21 (b). Otras veces disponía trapos o papeles en el modelo antes de tomar la fotografía, para proceder después como antes, Figura 22.

El modelo colgante funciona como una “maquina de proyectar”, como le llamó Collins (1971). Cuando se ha obtenido una forma satisfactoria, Gaudí trataba de representar el espacio por los métodos que se han citado. Finalmente, medía sobre el modelo para dibujar los planos. Como es fácil imaginar todo el proceso es extraordinariamente laborioso.

El modelo original se destruyó. En los años 1980 fue reconstruido por Rainer Graefe y Jos Tomlow. Este último escribió su tesis doctoral sobre el modelo y, finalmente, publicó un libro (Tomlow 1989) donde se recoge con todo detalle la investigación y los trabajos de reconstrucción del modelo (hoy día se exhibe en el museo de la Sagrada familia de Barcelona).

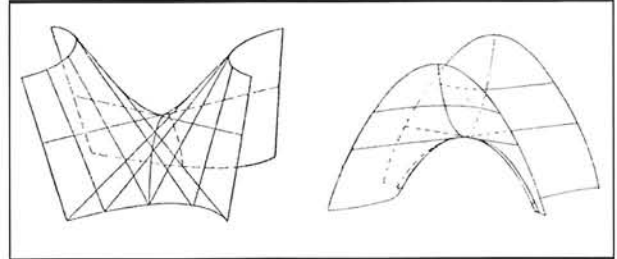


FIGURA 23. Superficie en paraboloides hiperbólico. (Collins 1963).

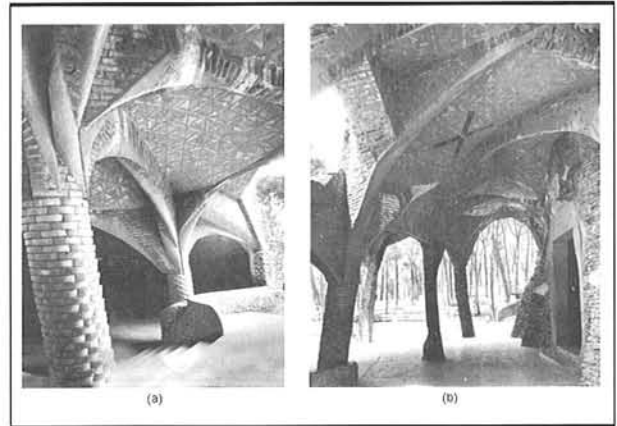


FIGURA 24.

BÓVEDAS EN PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

Gaudí no sólo aplicó los modelos colgantes con una generalidad y extensión nunca vista con anterioridad. También experimentó con nuevas formas geométricas para las bóvedas: en particular empleó superficies regladas: paraboloides hiperbólicos e hiperboloides de revolución. Así, las bóvedas del pórtico que rodea la cripta tienen forma de paraboloides hiperbólico, Figura 23. (Estas bóvedas han sido estudiadas con detalle por J. L. González en diversas publicaciones; véase por ejemplo, González 2002).

De nuevo se trata de una aportación completamente original. Gaudí traslada formas que aparecieron en los manuales de geometría descriptiva del siglo XIX (por ej. Leroy 1855, citado por C. Alsina y J. Gómez-Serrano en Giralto-Miracle 2002) a la construcción práctica. En sus conversaciones con sus discípulos manifiesta una y otra vez su fascinación por estas formas, por su sencillez geométrica, por su fácil generación debido a que son superficies regladas.

Su empleo en la cripta denota, asimismo, una perfecta comprensión de su funcionamiento estructural. A primera vista, esas formas abombadas, Figura 24 (a), parecen contradecir la esencia de la construcción de fábrica. La fábrica debe trabajar a compresión y esto es imposible si la bóveda presenta una convexidad hacia abajo. En realidad, el paraboloides hiperbólico es una superficie que presenta una curvatura gaussiana negativa en todos sus puntos; esto quiere decir que siempre en un punto las direcciones principales de curvatura tienen distinto signo: si hay una curvatura aparente hacia abajo, no hay duda de que tiene que existir otra con curvatura hacia arriba, como se aprecia en la foto de la Figura 24 (b). Esta última permitiría un funcionamiento “en arco”

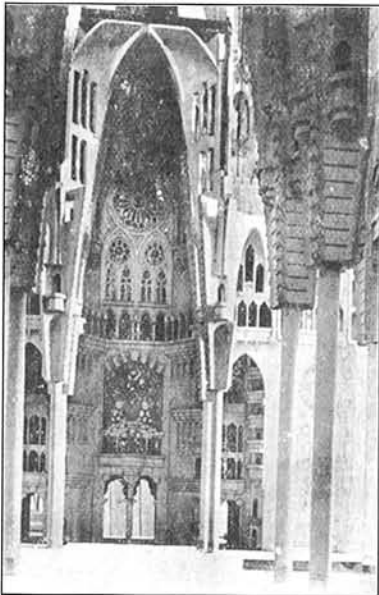


FIGURA 25. Frontón y ventanal en el muro lateral de la nave central de la Sagrada Familia. (Rafols 1929).

que transmitiría el peso de la bóveda hacia los bordes. Es evidente que Gaudí conocía esta propiedad y resulta también evidente que "juega" con el espectador al que trata de transmitir, y lo consigue, una sensación de inestabilidad. Es el mismo juego de los capiteles colgantes de los maestros góticos o de las claves "caídas" de los arcos manieristas. Es un juego sólo reservado a los maestros.

LA SAGRADA FAMILIA. EL MODELO "DE BLOQUES"

La última obra de Gaudí, en la que trabajó hasta su muerte, es el Templo de la Sagrada Familia. El proyecto de la iglesia de la colonia Güell había permitido a Gaudí estudiar a fondo el proyecto y la mecánica de arcos y bóvedas de cualquier forma. Sorprendentemente, en la Sagrada Familia abandona el enfoque a partir de modelos funiculares que había llevado hasta sus últimas consecuencias en la iglesia de la colonia Güell. El objetivo es distinto. El proyecto de la colonia Güell no tiene referencias a los estilos históricos de arquitectura. Todo en él presenta un carácter experimental, de investigación.

La Sagrada Familia tiene su origen en un proyecto neogótico anterior. Quizá por este motivo, Gaudí plantea en su proyecto un perfeccionamiento del gótico. Trata de verticalizar las cargas, de volver al modelo basilical primitivo (Sugrañes 1923). En particular, hay que eliminar las "muletas" del gótico: los arbotantes y estribos exteriores. Pero con la fábrica no es posible transmitir las cargas transversalmente sin empujes horizontales, que finalmente deben ser resistidos por algún sistema de contrarresto.

En el primer proyecto de 1898 trata de reducir el empuje al mínimo, peraltando los aristones y buscando una forma casi piramidal, Figura 25. El empuje horizontal se reduce pero persiste. Para resistirlo sin necesidad de estribos Gaudí inclina los pilares, buscando la misma dirección de las cargas. Esta idea parece ser la directora del proyecto y Gaudí la había ensayado e investigado exhaustivamente en la construcción del pórtico de la cripta de la iglesia en la Colonia Güell.

Como antes, hay pocos documentos para intentar reconstruir el proceso de proyecto y cálculo de Gaudí. Sólo quedan algunas fotos del modelo que construyó en su taller, y algu-

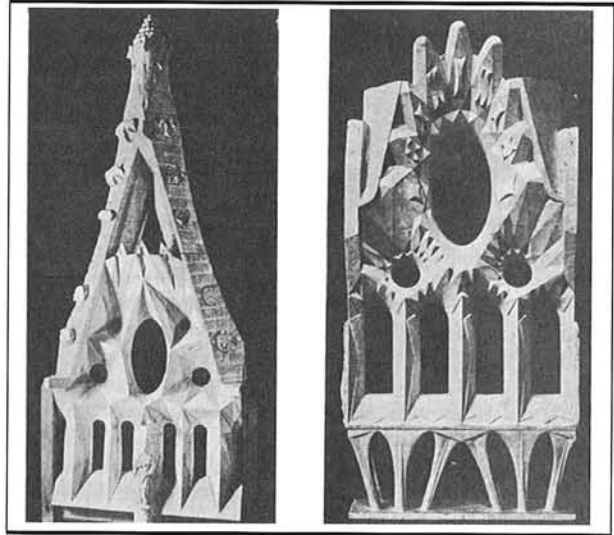


FIGURA 26. Frontón y ventanal en el muro de la nave central de la Sagrada Familia. (Rafols 1929).

nos dibujos y planos (el taller de Gaudí se destruyó durante la guerra de 1936). En lo que respecta al cálculo de estructuras, afortunadamente, su colaborador Sugrañes publicó un artículo en el *Anuario de la Asociación de Arquitectos de Cataluña* de 1923 explicando las líneas maestras del proceso de proyecto y exponiendo el detalle de los cálculos de estabilidad de la sección tipo de la Sagrada Familia.

Gaudí abandona los modelos funiculares y vuelve a la estática gráfica. Pero, no es la estática de los polígonos funiculares. Es un concepto distinto. Se trata de calcular y equilibrar los pesos como en una balanza. El artículo de Sugrañes se refiere a la etapa final del proyecto del sistema de pilares inclinados que soportan la nave central, muro y parte de las naves laterales, para un tramo tipo. En la etapa de cálculo que se describe ya está definida la forma de las cubiertas, bóvedas, muros y ventanales y se trata de hallar la forma del esqueleto ("árbol") de pilares que han de soportarles.

Sugrañes no dice nada sobre el proceso por el que se llegó a las formas de cubiertas y bóvedas. No obstante, la complejidad geométrica y constructiva de las bóvedas, muros, frontones, etc., es prueba de que existió un largo proceso de proyecto previo al análisis final de equilibrio presentado por Sugrañes, Figuras 26 y 27.

El método para proyectar los pilares es sencillo pero muy original. La idea central es el equilibrio entre los distintos bloques que forman la estructura, como en una balanza. La estructura se analiza en tres partes principales (nave central, muro y nave lateral) de las que se halla su peso total y la posición de su centro de gravedad. Cada una de estas partes está formada por una serie de elementos. El proceso es el siguiente: se calcula primero el peso y centro de gravedad de cada elemento (por los métodos usuales de la estática gráfica, dice Sugrañes) y, con estos datos, se calcula el peso y centro de gravedad de cada parte.

El problema central consiste en llevar estos pesos hacia las bases de las columnas que está prefijadas; esto es, hay que proyectar un esqueleto de pilares, un "árbol", que recoja las cargas de las partes en sus centros de gravedad y las transmita hasta el suelo. Se supone en este cálculo de equilibrio que cada parte transmite su carga en vertical a la "rama" correspondiente del árbol.

Así, pues, la concepción de equilibrio es muy diferente del sistema puramente funicular empleado en el proyecto de la iglesia de la Colonia Güell. Se trata de una concepción de equilibrio que podríamos denominar global o de un "sistema de bloques", donde cada una de las partes, compuesta a su vez por una serie de elementos, forma un bloque. Estos bloques, según Sugrañes, no interactúan entre sí, sino que las ramas del esqueleto van a buscar su peso concentrado en su centro de gravedad. No hay efecto arco, no hay empujes laterales, y esto es así, según dice Sugrañes, porque estarían contruidos por una materia "concrecionada" gracias al empleo de armaduras metálicas. Dado que la mayor parte de los elementos, y las bóvedas en particular, están definidos por superficies regladas no habría ningún problema en disponer barras rectas y, en el caso de las bóvedas, algunas de estas barras podrían servir de cimbra durante la construcción, que podría proceder sin necesidad de una cimbra tradicional.

Los pesos y posiciones de los centros de gravedad de las partes principales están fijados. También lo está el arranque de la columna, dado que la cripta ya estaba construida. Para proyectar el "árbol" que recoja estos pesos y los transmita hasta esos puntos de arranque, Gaudí emplea un método gráfico. Los métodos de la estática gráfica son muy complejos para el estudio del equilibrio en el espacio, pues hay que proyectar sobre tres planos distintos para definir un segmento en el espacio. En el caso de las naves de la Sagrada Familia hay dos planos de simetría y esto simplifica el problema y permite emplear con ventaja la estática gráfica. Así, Gaudí estudia medio tramo de la nave y, además, ese medio tramo tiene un plano de simetría vertical perpendicular al eje de la nave. Con estas dos condiciones y proyectando sobre dos planos, véase Figura 26, resulta sencillo tantear varias soluciones de equilibrio.

Por supuesto, para inclinar las cargas hacen falta empujes horizontales: no se pueden trasladar cargas en horizontal (en ausencia de elementos a flexión como vigas) sin un funcionamiento en arco. Dada la verticalidad del proyecto, éstos son pequeños, pero tienen que existir. En efecto, Sugrañes supone que se producen esfuerzos horizontales en el plano de simetría de las bóvedas central y lateral, que dan las inclinaciones principales de los pilares. (Algunos pilares se subdividen dentro del plano definido en el esquema general, pero el equilibrio está garantizado por la simetría que permite siempre obtener los empujes horizontales necesarios.) Luego, se calculan los pesos de dichos pilares, y, finalmente, tras pocos tanteos, se dibuja el esqueleto de equilibrio.

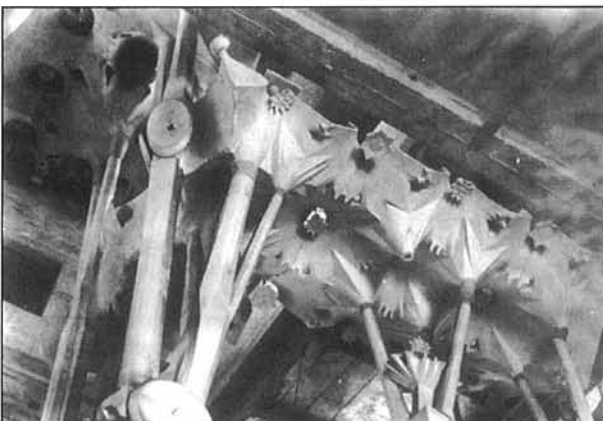


FIGURA 27. Foto del modelo de la Sagrada Familia mostrando las bóvedas de las naves laterales. (Puig Boada 1929).

Quizá el aspecto más discutible del proceso sea el suponer que las bóvedas y cubiertas no producen empujes. Las bóvedas delgadas (en este caso, no tan delgadas: Sugrañes les da 45 cm de espesor al calcular su peso) aunque vayan armadas, requieren unas ciertas condiciones de borde para conseguir un estado de equilibrio principalmente de membrana (con flexiones despreciables), que es el que corresponde a una cás-

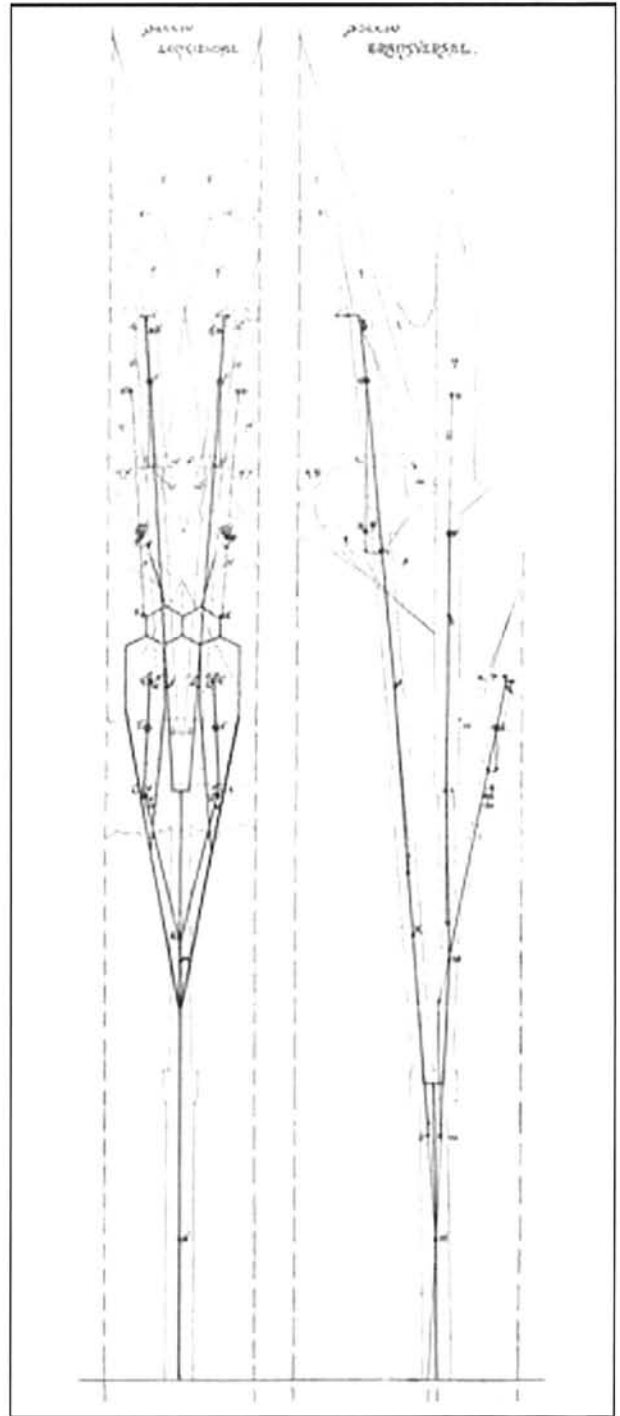


FIGURA 28. Análisis gráfico de equilibrio para determinar el esqueleto de pilares, en forma de árbol, que soporta cubiertas, bóvedas y el muro lateral. (Sugrañes 1923).

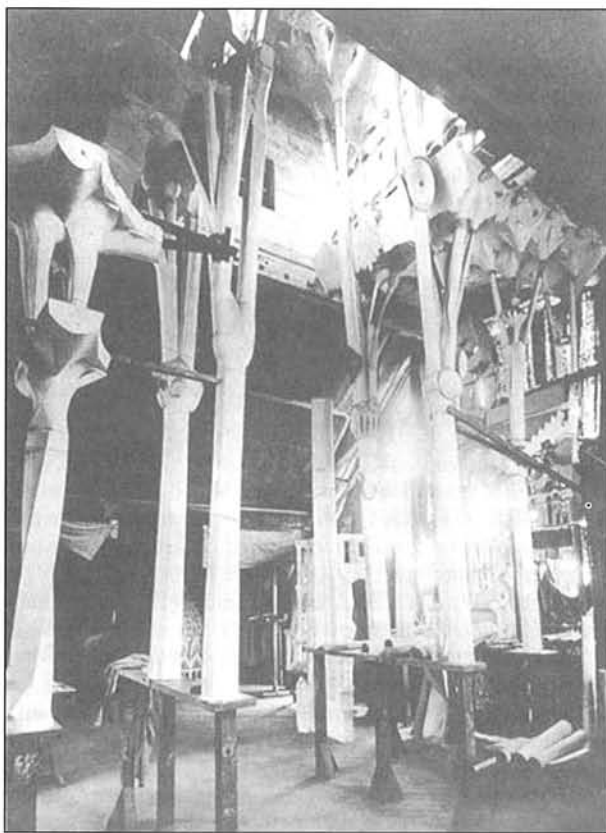


FIGURA 29. Fotografía del modelo que Gaudí construyó en su taller. (Puig Boada 1929).

cara o bóveda bien proyectada. Estos esfuerzos de borde, en forma de empujes principalmente, pueden estar compensados en la armadura de los forjados horizontales. En cuanto a las bóvedas de la nave, su peso es pequeño y, por consiguiente, también su empuje. Pero hay empujes y deben ser resistentes.

La afirmación de Sagrañes sobre la ausencia de empujes debido al empleo de armaduras no es, pues, correcta. Como sucede siempre en el caso de Gaudí, no podemos saber si Sagrañes ha entendido enteramente el trabajo del maestro. Dada su enorme experiencia en el proyecto y construcción de bóvedas delgadas, es muy probable que Gaudí supiera de la existencia de su empuje pero lo ignorara por su carácter secundario dentro del esquema general de equilibrio.

De hecho, la forma geométrica del proyecto demuestra que Gaudí sí consideró la existencia de empujes y la necesidad de transmitirlos lo más verticalmente posible, para mantener su esquema general. Gaudí acude a un recurso típicamente gótico: eliminar el contrafuerte a base de aumentar enormemente la carga vertical. Este sistema fue llevado al extremo en la Catedral de Palma de Mallorca, donde los esbeltos pilares de la nave soportan el empuje de la nave lateral gracias al enorme peso añadido sobre los arcos perpiños, y claves de la nave central.

En la Sagrada Familia, es el enorme peso del frontón y ventanales el que contiene estos empujes, verticalizándolos. Además, Gaudí, a pesar de sus críticas al gótico, coloca unos arbotantes: en efecto, en la maqueta de la cubierta (Fig. 30b) pueden apreciarse con claridad unos pequeños arbotantes que transmitirían parte del empuje de bóvedas y cubierta a los

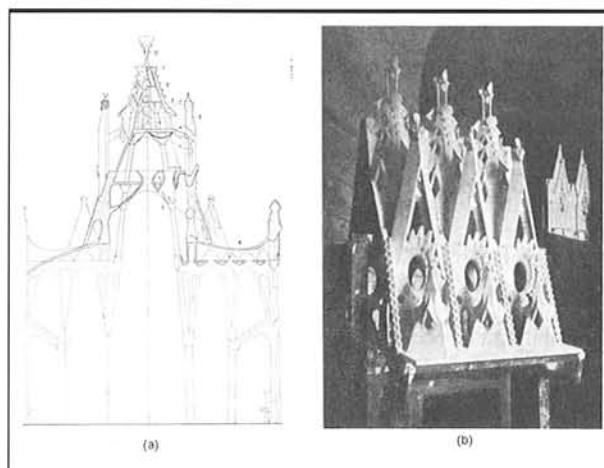


FIGURA 30.

pilares de la nave lateral. Estos arbotantes se aprecian también en la sección de Bergós (Fig. 30a). Pero, ciertamente, el empuje de los elementos es secundario en la trayectoria general de equilibrio prevista y el proyecto de Gaudí es enteramente correcto desde el punto de vista estructural.

GAUDÍ Y EL ENFOQUE DEL EQUILIBRIO

Todos los métodos de análisis y proyecto empleados por Gaudí se basan en establecer sistemas de equilibrio. Expresado de forma más técnica: Gaudí maneja sólo las ecuaciones de equilibrio de la estática. Unas veces emplea modelos, otras aplica la estática gráfica, pero sólo maneja estas ecuaciones. Las otras dos ecuaciones estructurales que hacen afirmaciones sobre el material o sobre la geometría de la deformación (compatibilidad) están completamente ausentes.

Gaudí está aplicando la idea central de la "antigua teoría de bóvedas" que se desarrolló y aplicó en los siglos XVIII y XIX, y que se basaba en buscar configuraciones de equilibrio donde la fábrica trabajara a compresión. La seguridad se obtenía "revistiendo" el esqueleto de esfuerzos, las líneas de empujes, con fábrica suficiente como para obtener seguridad frente a pequeños movimientos o variaciones pequeñas de las cargas (como hizo Gaudí en su proyecto de la iglesia de la colonia Güell).

A finales del siglo XIX este enfoque de equilibrio se consideraba meramente aproximado, cuando no incorrecto. En efecto, el reguesamiento del esqueleto permitía la existencia no de un sólo esqueleto de fuerzas, sino de infinitos: las ecuaciones de equilibrio no permiten determinar los esfuerzos internos y hay infinitos esqueletos resistentes dentro de la fábrica, todos ellos en equilibrio con las cargas. (En la iglesia de la Colonia Güell el estado de equilibrio actual, sin el peso de la iglesia superior, es muy diferente del calculado en el modelo; no obstante, es posible, debido al citado "reguesamiento" de la fábrica alrededor del esqueleto funicular).

Los ingenieros de finales del siglo XIX, profundamente imbuidos de la "filosofía elástica" de Navier (lo que el profesor Heyman, 1999a, ha denominado "la camisa de fuerza" de Navier) encontraban esta indeterminación como un grave defecto: querían hallar el estado real de la estructura, la forma en que verdaderamente transmitía sus cargas al terreno.

La solución fue, entonces, aplicar el cálculo elástico, esto es, añadir a las ecuaciones de equilibrio las del material

(elástico-lineal) y las de compatibilidad (continuidad de los elementos, condiciones de contorno). Así, para calcular un arco de un puente, formado de dovelas independientes y apoyado sobre un terreno que, inevitablemente, cedería ligeramente tras el descimbrado, se consideraba una rosca continua, homogénea, isotrópica, de un material perfectamente elástico, que estaba perfectamente empotrado (giros y desplazamientos impedidos). De esta manera, se obtenía una solución única, una única línea de empujes "elástica" que representaba el "estado real del arco". No obstante, en el caso de los arcos de fábrica, con mucha frecuencia aparecían agrietamientos tras el descimbrado que demostraban la imposibilidad del estado "real" calculado. Ante esto no había respuesta, y la contradicción evidente, el hecho de que el estado calculado no representaba en modo alguno a la estructura física real, fue ignorado casi sistemáticamente (con algunas excepciones como Swain 1927). El hecho real es que los puentes calculados elásticamente se mantenían en pie, como también lo hacían los puentes calculados por la antigua teoría.

La contradicción sólo se resolvió con el desarrollo de la Teoría Plástica (o Análisis Límite, o Teoría de Rotura). La misma disparidad entre cálculos y deformaciones en estructuras reales fue observada en los ensayos sistemáticos de pórticos realizados por el Comité de Investigación de Estructuras de Acero en Inglaterra en los años 1920. La teoría plástica nació, pues, de la insuficiencia de la teoría elástica. El desarrollo de la teoría plástica culminó con la demostración de los Teoremas Fundamentales (en Rusia, en 1936, por Grozdev; redescubiertos en los años 1950; cf. Heyman 2001).

El Teorema de la Seguridad resuelve el dilema de la tarea imposible de encontrar el estado "real" de la estructura: si es posible encontrar una distribución de esfuerzos internos en equilibrio con las cargas superiores que no viola la condición de límite o cedencia del material la estructura es segura, no colapsará. La situación de equilibrio no tiene por qué ser "real", sólo tiene que ser posible. La estructura es, al menos, tan inteligente como el calculista y antes de hundirse encontrará la situación de equilibrio pensada (puede haber otras muchas y este Teorema justifica la estabilidad de la cripta de iglesia de la Colonia Güell).

De hecho, el Teorema de la Seguridad conduce a lo que el profesor Heyman ha denominado el "enfoque del equilibrio": para proyectar o analizar edificios construidos con un material "plástico" podemos trabajar exclusivamente con las ecuaciones de equilibrio, chequeando después que no se incumple la condición de cedencia del material (en un pórtico que en ninguna sección se supere el valor del momento plástico último correspondiente).

La teoría plástica se desarrolló para materiales que, como el acero, presentan una zona de cedencia suficientemente grande como para permitir giros concentrados en determinados puntos (las rótulas plásticas). Enseguida se vio que podía aplicarse al hormigón armado (para piezas con limitación de armado). El profesor Heyman ha hecho notar que, en realidad, el Teorema de la Seguridad se aplica a cualquier estructura construida con un material que manifieste una cierta "plasticidad", que permita la formación, aunque sea parcial, de rótulas y, por supuesto, en ausencia de fenómenos de inestabilidad local o global. Se trata de materiales no-frágiles, tenaces, y podemos añadir a los arriba citados la madera y, aunque parezca sorprendente, la fábrica (Heyman 1999b; Huerta 2001).

En el caso de la fábrica la condición de límite del material es que tiene que trabajar a compresión y, para ello, los esfuerzos deben estar contenidos siempre dentro de la

estructura. El Teorema de la Seguridad se puede enunciar ahora así: Si es posible dibujar un conjunto de líneas de empujes en equilibrio con las cargas dentro de la fábrica, la estructura es segura. La condición de estabilidad es puramente geométrica y la seguridad de una estructura de fábrica depende de su forma.

El enfoque de proyecto y análisis de Gaudí es un enfoque de equilibrio y está plenamente justificado por el Teorema de la Seguridad. De hecho Gaudí fue el primero en extraer todas las consecuencias del enfoque del equilibrio: no se limitó a verificar estructuras previamente proyectadas, como había sido el caso hasta entonces, su empeño fue proyectar directamente estructuras equilibradas. Por supuesto, hay infinitas soluciones, y Gaudí consideraba el aspecto mecánico como una más entre las muchas condiciones que debe cumplir un proyecto de arquitectura.

BIBLIOGRAFÍA

- BENVENUTO, E. (1991). *An Introduction to the History of Structural Mechanics. Part II: Vaulted Structures and Elastic Systems*. New York/Berlin: Springer Verlag.
- BERANEK, W. J. (1988). "Understanding of Structures." *Stable-Unstable? Structural Consolidation of Ancient Buildings*, editado por R.M. Lemaire y K. Van Balen, Leuven: Leuven University Press, pp. 29-44.
- BÉRARD, J. B. (1810). *Statique des voûtes*. Paris: Chez Firmin Didot.
- BERGOS MASSO, J. (1953). *Materiales y elementos de construcción. Estudio experimental*. Barcelona: Bosch.
- BERGOS MASSO, J. (1965). *Tabicados huecos*. Barcelona: Colegio de Arquitectos de Cataluña y Baleares.
- BOUGUER, P. (1734). "Sur les Lignes Courbes propres a former les Voûtes en Dome." *Mémoires de l'Académie Royale de Sciences de Paris*, pp. 149-166.
- CODINACHS, M. (ed.) (1982). *Antoni Gaudí. Manuscritos, artículo, conversaciones y dibujos*. Madrid: Colegio Oficial de Aparejadores y Arquitectos Técnicos.
- COLLINS, G. R. (1963). "Antonio Gaudí: Structure and Form," *Perspecta*, Vol. 8, pp. 63-90.
- COLLINS, G. R. (1966). "Antonio Gaudí: Estructura y forma," *Hogar y Arquitectura*, pp. 34-52.
- COLLINS, G. R. (1971). "Antonio Gaudí and the uses of technology in modern architecture". En: *Civil engineering: History, heritage and the humanities.*, Selected papers from the First National Conference. Princeton, N.J.: Princeton University, vol. 1.
- CULMANN, K. (1866). *Die graphische Statik*. Zürich: Meyer und Zeller.
- FRÉZIER, A. F. (1754-69: 1a. ed. 1737). *La théorie et la pratique de la coupe de pierres et des bois...* Strasbourg/Paris: Charles-Antoine Jombert.
- GIRALT-MIRACLE, D. (2002). *Gaudí. La búsqueda de la forma. Espacio, geometría, estructura y construcción*. Barcelona.
- GONZÁLEZ MORENO-NAVARRO, J. L. Y A. CASALS BALAGUÉ (2002). *Gaudí y la razón constructiva. Un legado inagotable*. Madrid: Akal.
- GRAEFE, R. (1986). "Zur Formgebung von Bogen und Gewölben." *Architectura*, Vol. 16, pp. 50-67.
- GREGORY, D. (1697). "Catenaria." *Philosophical Transactions of the Royal Society*, Vol. 19, n° 231, pp. 637-652.
- HEYMAN, J. (1998). "Hooke's cubico-parabola conoid." *Notes and Records of the Royal Society of London*, Vol. 52 (1), pp. 39-50.

- HEYMAN, J. (1999a). "Navier's straitjacket." *Architectural Science Review*, Vol. 42, 1999, pp. 91-95.
- HEYMAN, J. (1999b). *El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica*. Madrid: Instituto Juan de Herrera / CEHOPU.
- HEYMAN, J. (2001). *La ciencia de las estructuras* Madrid: Instituto Juan de Herrera.
- HEYMAN, J. (2003). «Wren, Hooke and partners». *Proceedings of the First International Congress on Construction History (Madrid 20th-24th January 2003)*, ed. por S. Huerta. Madrid: Instituto Juan de Herrera, pp. 3-9.
- HOOKE, R. (1676). *A description of helioscopes, and some other instruments*. London.
- HUERTA FERNÁNDEZ, S. (1996). «La teoría del arco de fábrica: desarrollo histórico» *Obra Pública (Número especial sobre Ingeniería e Historia, n° 38)*, pp. 18-29.
- HUERTA FERNÁNDEZ, S. (1998). «Mecánica de las bóvedas de la Catedral de Gerona» *Actas del Curso sobre grandes bóvedas hispanas*, ed. S Tarragó. Madrid: CEDEX-CEHOPU, pp. 53-65.
- HUERTA FERNÁNDEZ, S. (2001). «Mechanics of masonry vaults: The equilibrium approach» *Historical Constructions 2001. Proceedings of the 3rd. International Seminar. Guimarães 7-9, November*, P. B. Lourenço and P. Roca, eds. Guimarães: Universidade do Minho, pp. 47-69.
- INGLIS, C. (1951). *Applied Mechanics for Engineers*. Cambridge: Cambridge University Press.
- KOERNER, C. (1901). *Gewölbte Decken* (Handbuch der Architektur. Dritter Teil. 2 Band. Heft 3,b). Stuttgart: Arnold Bergsträsser Verlagsbuchhandlung.
- LEROY, C. F. A. (1855). *Traité de Géométrie Descriptive*. Paris: Mallet-Bachelier.
- MARTINELL, C. (1969). *Conversaciones con Gaudí*. Barcelona: Ediciones Punto Fijo.
- MAXWELL, J. C. (1864). "On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames." *Philosophical Magazine*, Vol. 27, pp. 294-300.
- MÉRY, E. (1840). "Mémoire sur l'équilibre des voûtes en berceau." *Annales des Ponts et Chaussées*, pp. 50-70, planches 133-134.
- MOSELEY, H. (1835). "On the equilibrium of the arch. (Read Dec. 9, 1833)." *Cambridge Philosophical Transactions*, Vol. 5, pp. 293-313.
- MOSELEY, H. (1837). "On the theory of the equilibrium of a system of bodies in contact." *Cambridge Philosophical Transactions*, Vol. 6, pp. 463-491.
- OTTO, F. (1883). "Der Bogen." *Arcus*, n° 2, n° 3, n° 4, pp. 71-81, 119-127, 199-207.
- PLANAT, P. (1887). *Pratique de la mécanique appliquée a la resistance des matériaux*. Paris: La Construction Moderne.
- PLANAT, P. (1906). *L'Art de Bâtir. Vol. 3: Voûtes en maçonnerie. Voûtes d'églises. Flèches et tours. Béton Armé. Silos*. Paris: Librairie de la Construction Moderne.
- PUIG BOADA, I. (1929). *El Temple de la Sagrada Familia*. Barcelona: Editorial Barcino.
- PUIG BOADA, I. (1976). *L'església de la Colònia Güell*. Barcelona: Lumen. [texto en catalán, inglés y español]
- POLINI, G. (1748). *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano*. Padova: Nella Stamperia del Seminario.
- RANKINE, W. J. M. (1858). *A Manual of Applied Mechanics*. London: Charles Griffin.
- ROCA, P.; J.L. GONZÁLEZ; R. BRUFAU y J. GÓMEZ SERRANO (1996). «Consideraciones sobre la dimensión estructural de la obra de Antoni Gaudí» *Obra Pública (Número especial sobre Ingeniería e Historia, n° 38)*, pp. 50-63.
- RUBIO BELLVER, J. (1912). "Conferencia acerca de los conceptos orgánicos, mecánicos y constructivos de la Catedral de Mallorca." *Anuario de la Asociación de Arquitectos de Cataluña*, pp. 87-140.
- RUBIO BELLVER, J. (1913). "Dificultats per a arribar a la síntesis arquitectónica." *Anuario de la Asociación de Arquitectos de Cataluña*, pp. 63-79. [traducción castellana en Tarragó 1991]
- SNELL, G. (1846). "On the Stability of Arches..." *Minutes and Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Vol. 5, pp. 439-476, láms. 27-40.
- SUGRAÑÉS GRAS, DOMINGO. (1923). "Disposició estàtica del temple de la Sagrada Família." *Anuario de la Asociación de Arquitectos de Cataluña*, pp. 17-36.
- SWAIN, G. F. (1927). *Structural Engineering. Stresses, graphical statics and masonry* New York: McGraw-Hill Book Company.
- TAPPE, W. (1818-21). *Darstellung einer euen, äußerst wenig Holz erfordernden und höchst feuersicheren Bauart*. Essen.
- TARRAGO CID, S. (1974). "Gaudí entre la estructura y la forma," *A+U*, n° 86 (extra issue), pp. 13-59.
- TARRAGO CID, S. (ed.). (1991). *Antoni Gaudí*. Barcelona: Ediciones del Serbal.
- TOMLOW, J. (1989). *Das Modell. Antoni Gaudis Hängemodell und seine Rekonstruktion. Neue Erkenntnisse zum Entwurf für die Kirche der Colonia Güell*. Stuttgart: Institut für leichte Flächentragwerke. Universität Stuttgart. [texto en alemán, inglés y español].
- TOMLOW, J. (1993). «Die Kuppel des Gießhauses der Firma Henschel in Kassel (1837). Eine frühe Anwendung des Entwurfsverfahrens mit Hängemodellen.» *Architectura*, Vol. 23, pp. 151-72.
- VILLARCEAU, A. Y. (1853). *Sur l'établissement des arches de pont, envisagé au point de vue de la plus grande stabilité...* Paris: Imprimerie Impériale.
- WITTMANN, W. (1879). "Zur Theorie der Gewölbe." *Zeitschrift für Bauwesen*, Vol. 29, cols. 61-74.
- YOUNG, TH. (1845; 1a. ed. 1807). *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts... A New Edition, with references and notes by the Rev. P. Kelland*. London: Taylor and Walton.